

АВГУСТ

ISSN 0130-2221

2017 · № 8

КВАНТ

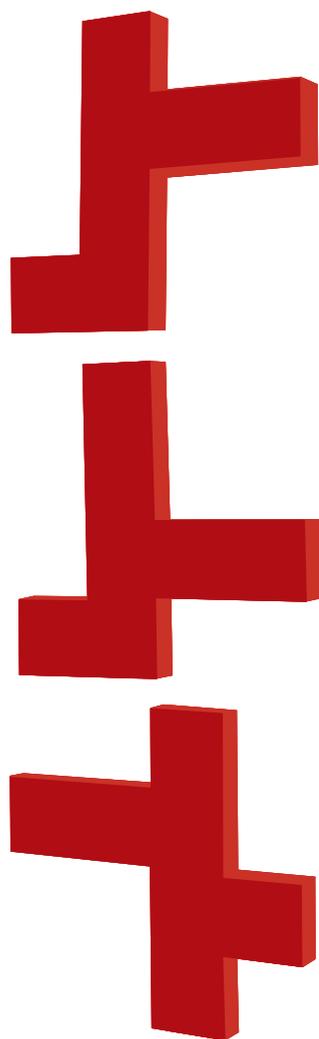
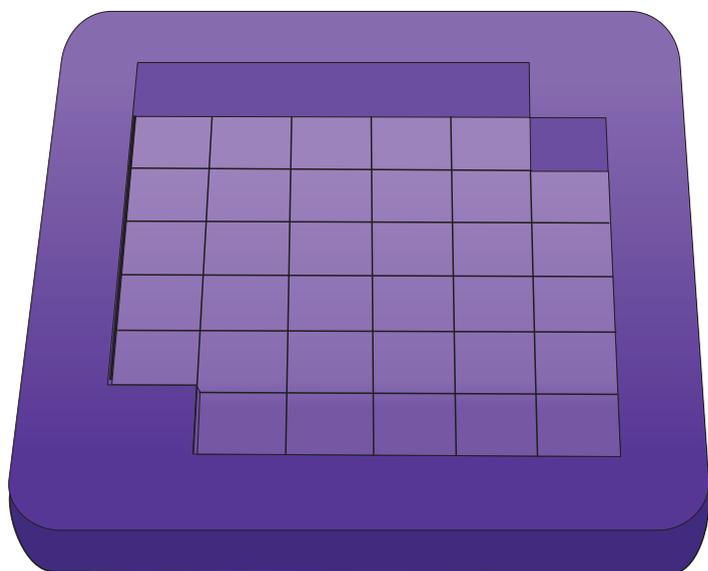
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ТРИ ГЕПТАМИНО

В этой головоломке изобретателя из Сингапура Гоха Пита Хьяма (*Goh Pit Khiam*) нужно поместить три гептамино (т.е. три фигурки, составленные из семи единичных квадратиков) внутрь рамки, в роли которой выступает квадрат 6×6 без двух противоположных угловых клеток. Может показаться, что это легко: рамка большая, а фигурок мало и они не такие уж и большие. Но все не так просто, и совсем прямолинейный подход здесь вряд ли сработает. Желаем удачи!

Е.Епифанов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.Л.Семенов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
П.А.Кожевников (*заместитель главного редактора*),
С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,
В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер

- 2 Для чего мы изучаем математику? (окончание)
В.Арнольд
- 7 Поверхность и что на ней происходит.
Л.Ашкинази

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи М2474–М2477, Ф2481–Ф2484
14 Решения задач М2462–М2465, Ф2469–Ф2472

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 22 Задачи
23 XXIII Турнир математических боев имени
А.П.Савина

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 25 Метод координат: решения без лишних
вычислений. *О.Иванов*
- 30 Наблюдая за струей воды... *В.Дроздов*
- 31 Одинокая капля в далекой вселенной.
Ю.Брук, А.Стасенко

КАЛЕЙДОСКОП

- 32 Трисекторы

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Антипараллели и коники. *П.Кожевников*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 О границах применимости классической
молекулярно-кинетической теории.
С.Варламов

ОЛИМПИАДЫ

- 42 XXIV Международная олимпиада «Туймаада»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 46 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»
- 50 Ответы, указания, решения
- Вниманию наших читателей (24)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Одинокая капля в далекой вселенной»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Для чего мы изучаем математику?

Что об этом думают сами математики

В. АРНОЛЬД

СЛЕДУЮЩИЙ ПРИМЕР – РИМАНОВЫ поверхности. Их ввел в рассмотрение немецкий математик Бернхард Риман в середине прошлого века. Это поверхности, которые получаются в результате соответствующего разрезания и склеивания нескольких (или даже бесконечного числа) плоскостей комплексного переменного. Топологически такая поверхность может быть сферой, сферой с несколькими ручками и т.д. (рис.5). Учение о римано-

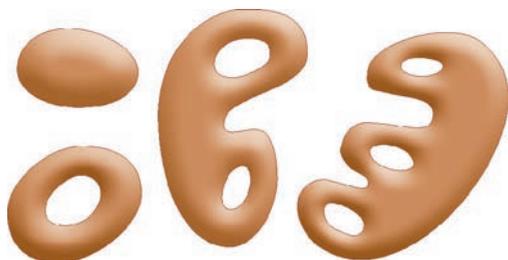


Рис. 5. Римановы поверхности

вых поверхностях разработано в теории функций комплексного переменного. Затем они неожиданно оказались полезными совершенно в других задачах. Например, на римановых поверхностях получили простую геометрическую трактовку эллиптические интегралы.

Рассмотрим, например, движение частицы по прямой в поле с потенциальной энергией U , определяемое уравнением Ньютона

$$x'' = -\frac{dU}{dx}.$$

Предположим, что U – многочлен четвертой

степени с двумя несимметричными потенциальными ямами (рис.6). Движение частицы в

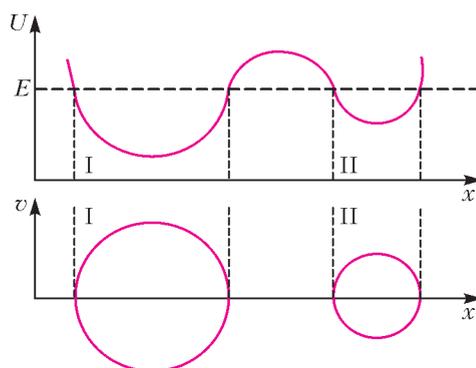


Рис. 6. Потенциальные ямы и фазовая плоскость

каждой из ям периодически. В какой из ям период колебаний (при данном значении полной энергии E) больше: в более глубокой или более мелкой? Из теории римановых поверхностей следует, что оба этих периода точно равны.

Закон сохранения энергии

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E \quad \left(v = \frac{dx}{dt} \right)$$

определяет на «фазовой плоскости» (x, y) кривую, состоящую из двух компонент. Период дается формулой

$$T = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

(ибо $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{2(E-U)}}$).

Если U – многочлен 4-й степени, то этот интеграл эллиптический, он не берется в элементарных функциях. Причина – топологичес-

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

кая. Уравнение закона сохранения энергии определяет «кривую» на «плоскости» двух комплексных переменных (x, y) (эта плоскость имеет вещественную размерность 4). Эта «кривая» (пополненная парой бесконечно удаленных точек) и есть риманова поверхность нашей задачи. Топологически эта поверхность представляет собой тор (рис.7). Этим и объяс-

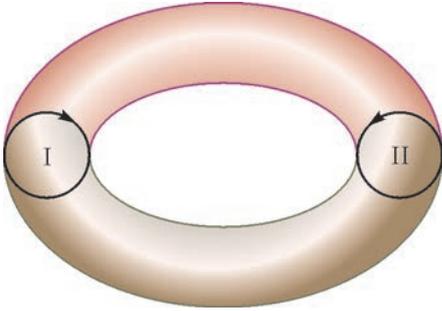


Рис. 7. Риманова поверхность эллиптических интегралов

няется несводимость эллиптических интегралов к элементарным (чтобы интегралы брались, риманова поверхность должна иметь топологию сферы).

Вещественные точки нашей римановой поверхности – это в точности две замкнутые траектории на вещественной фазовой плоскости (x, y) , соответствующие периодическим движениям частицы с фиксированной полной энергией E в обеих ямах и изображенные на рисунке 6 внизу. На поверхности тора они расположены как два меридиана (см. рис.7).

Равенство периодов колебаний в обеих ямах следует из того, что суммарный поток несжимаемой жидкости, текущей по поверхности тора, через оба края цилиндра, ограниченного на торе парой его меридианов, равен нулю.

Карл Густав Якоби доказал, что римановы поверхности «управляют» еще двумя задачами:

1) определение числа способов, которыми заданное число можно представить в виде суммы четырех квадратов

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + u^2;$$

2) исследование колебаний маятника, которое приводит к решению дифференциального уравнения $x'' = -\sin x$.

В качестве пятого примера рассмотрим так называемый треугольник Бернулли–

Эйлера:

				1					
				1	0				
			0	1	1				
			2	2	1	0			
			0	2	4	5	5		
			16	16	14	10	5	0	
			0	16	32	46	56	61	61
			272	272	256	224	178	122	61
			0	272	256	224	178	122	61
			0	0	0	0	0	0	0

Он заполняется так. В нулевой строке пишется «1». Каждая нечетная строка (1-я, 3-я, ...) заполняется справа: в каждой позиции стоит сумма всех чисел предыдущей строки, стоящих правее данной позиции. Каждая четная строка заполняется аналогично, но слева.

Чудо, заключенное в этом треугольнике, открыто 100 лет назад. Ключ к нему дает «простая» (математики часто скрывают, что все обстоит очень просто) теорема:

$$\sec t + \operatorname{tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}.$$

Коэффициенты k_n в этом равенстве стоят на «склонах» (боковых сторонах) треугольника Бернулли–Эйлера.

Отсюда по левому «склону» легко получить разложение в степенной ряд функции $\operatorname{tg} x$ (вспомните, что она нечетная, и в разложении будут только нечетные члены):

$$a_1 = \frac{k_1}{1!} = 1,$$

$$a_3 = \frac{k_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$a_5 = \frac{k_5}{5!} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

.....

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

Аналогично по правому «склону» получается разложение в ряд секанса.

Треугольник Бернулли–Эйлера доставляет топологическую классификацию вещественных многочленов

$$x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1},$$

все n критических значений которых вещественны и различны.

График такого многочлена имеет вид змеи, и я буду называть его змеей.

Все возможные типы змей с $n \leq 4$ указаны на рисунке 8.

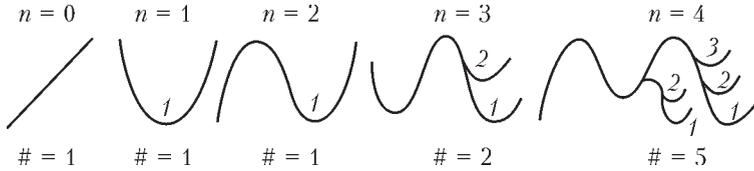


Рис. 8. Классификация змей

Мы относим две змеи к одному типу, если они переводятся друг в друга гладкими заменами независимых и зависимых переменных, сохраняющими ориентации (т.е. имеющими положительные производные).

Рассмотрим, например, змеи многочленов степени 4 ($n = 3$). Три критические точки обязательно идут в порядке минимум – максимум – минимум. Топологический тип змеи определяется тем, будет ли последний минимум выше или ниже первого. Поэтому число типов змей с $n = 3$ равно 2.

Для змей с $n = 4$ второй максимум может быть ниже или выше первого. В первом случае второй минимум может занимать два положения (выше или ниже первого минимума, но всегда ниже обоих максимумов), а во втором – три. Итого 5 типов.

Если у вас хватит терпения нарисовать все змеи с $n = 5$, то вы убедитесь, что их 16, а при $n = 6$ их 61 (это тоже еще поддается рисованию). Появление в какой-нибудь классификации числа Эйлера 61 – обычно признак того, что рядом и остальные.

Будем теперь классифицировать змей по хвостам, т.е. по самым правым критическим точкам. Занумеруем все n критических значений (значения многочленов в точках локальных максимумов и минимумов) в порядке возрастания (т.е. снизу вверх) числами от 1 до n . Этот номер критической точки будем называть ее высотой.

Высоты хвостов змей указаны на рисунке 8. Например, пять змей с $n = 4$ распределяются по высотам хвостов так:

высота хвоста	1	2	3	4
число змей	2	2	1	0

Сумма $2 + 2 + 1 + 0 = 5$, естественно, равна

полному числу змей. Сравнивая эти числа змей с разными высотами хвостов с числами треугольника Бернулли–Эйлера, видим, что они (с точностью до порядка) совпадают.

После того как этот – достаточно неожиданный – факт замечен (для чего обязательно

нужна экспериментальная работа с рисованием змей), уже нетрудно доказать, что распределение змей по высотам хвостов удовлетворяет рекуррентному соотношению, определяющему треугольник Бернулли–Эйлера. Сама формула

$$K(t) = \sec t + \operatorname{tg} t,$$

где

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!},$$

доказывается так.

Рассмотрим змею с $n + 1$ критической точкой. Выберем самый высокий локальный максимум и потянем его вверх до бесконечности. В результате змея распадется на две более короткие змеи, причем суммарное число критических точек уменьшится на 1. Аналогично можно потянуть до $-\infty$ самый низкий локальный минимум. Отсюда получается рекуррентное соотношение

$$2K_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i k_i k_{n-i}.$$

Здесь произведение $k_i k_{n-i}$ пересчитывает всевозможные пары обрывков, множитель C_n^i учитывает различие взаимных расположений критических значений на обоих обрывках. а коэффициент 2 учитывает использование и максимума, и минимума.

В терминах функций K наше соотношение записывается в виде дифференциального уравнения

$$2 \frac{dK}{dt} = 1 + K^2,$$

откуда $K = \sec t + \operatorname{tg} t$, поскольку

$$K(0) = k_0 = 1.$$

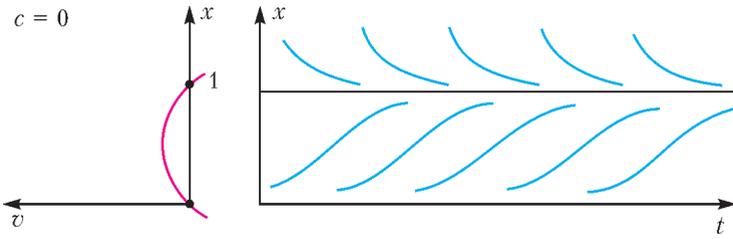


Рис. 9. Стабилизация населения

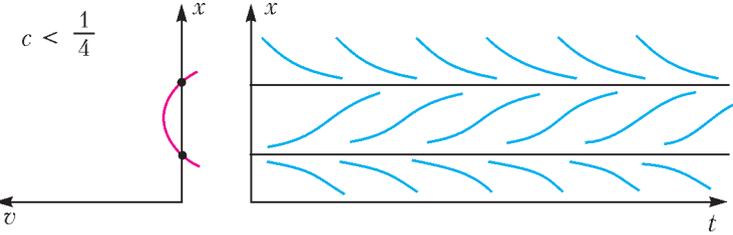


Рис. 10. Модель рыболовства

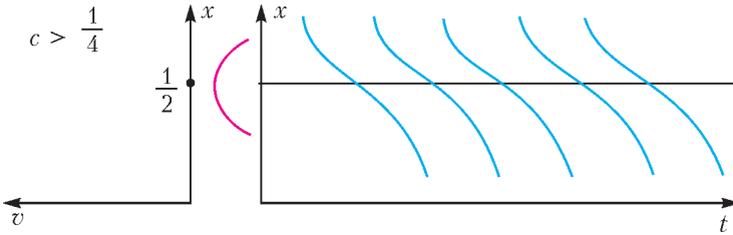


Рис. 11. Перелом

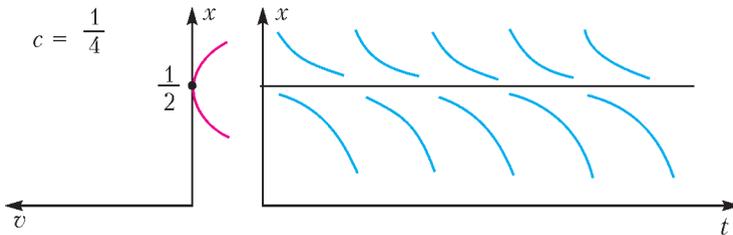


Рис. 12. Оптимальный план уничтожает популяцию

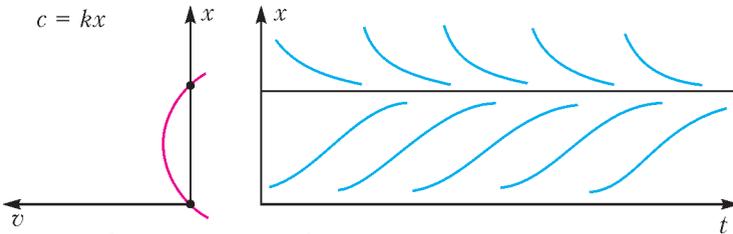


Рис.13. Обратная связь стабилизирует систему

Последний пример. Рассмотрим модель изменения численности некоторой популяции животных (например, количество рыбы в пруду или океане). В простейшем случае ситуация описывается моделью

$x' = kx$ (x – численность популяции, k – коэффициент пропорциональности). Решением этого дифференциального уравнения является экспонента.

Однако на практике с ростом x ухудшаются условия жизни популяции, и коэффициент k уменьшается. Например, при $k = a - bx$ получаем так называемое логистическое уравнение. В случае $a = b = 1$ его решения (рис.9) ведут к стабильному уровню «населения» $x = 1$.

Если вдобавок ввести некоторую квоту c на отлов части популяции, то уравнение усложнится незначительно: $x' = x - x^2 - c$. Это простейшая модель рыболовства. При уровне квоты $c < 1/4$ снова устанавливается устойчивое решение (рис.10), при $c > 1/4$ получим быстрый процесс вымирания (рис.11).

При $c = 1/4$ решения уравнения приводят к установившемуся режиму на уровне $1/2$ от исходной популяции (рис.12). Однако этот режим неустойчив: малые случайные колебания ведут к катастрофе – уничтожению популяции.

Как достичь оптимального вылова при сохранении популяции на некотором устойчивом уровне? Ответ: не назначать жесткого плана вылова, а вести его с учетом обратной связи, т.е. ввести квоту, пропорцио-

нальную фактически имеющимся ресурсам. В модели с обратной связью $x' = x - x^2 - kx$ оптимальное значение коэффициента $k < 1/2$. При таком выборе k устанавливается средний многолетний вы-

лов $kx_0 = 1/4$ (рис.13). Это такой же вылов, как при максимально жестком плане отлова.

Большая производительность в этом случае невозможна. Но при жестком плане система теряет устойчивость и гарантированно самоуничтожается, а обратная связь стабилизирует ее, и небольшие изменения коэффициента k не ведут к катастрофе.

Было бы совсем неплохо, если бы лица, принимающие ответственные решения, были ознакомлены с подобными моделями и другими правилами выбора стратегических социальных решений.

Более простые математические соображения – тот факт, что законы природы описываются дифференциальными уравнениями, – позволяют понять некоторые кажущиеся парадоксальными явления в нашей жизни.

В течение нескольких десятилетий состояние нашей экономики вызывало тревогу специалистов: милитаризация, монополия и общая некомпетентность руководства привели к тому, что сделалась устойчиво отрицательной вторая производная (стали систематически замедляться темпы развития).

Не понимающего математику это не слишком пугало, так как первая производная все же была положительна (благосостояние росло). Но математики знают, что постоянно отрицательная производная (даже высокого порядка) в конце концов приведет к отрицательности первой производной, т.е. к падению производства и благосостояния общества, причем этот процесс ухудшения, когда он делается заметным, будет ускоряться. Вследствие инерционности системы мгновенно изменить положение в такое время нельзя уже никакими средствами, так как всякого рода изменения влияют лишь на знак старшей производной (для нашей перестройки – третьей или даже четвертой). Таким образом, наблюдаемая экономическая деградация вызвана не столько неправильными новыми решениями, сколько давними ошибками, сделанными еще во время роста производства.

К сожалению, эти элементарные математические факты очень трудно объяснить ограбленному народу, склонному приписывать все ухудшение реформам. Любые реформы, конечно, должны приводить к ухудшению, даже если они самые правильные.

Планы обычно составлялись так, чтобы оптимизировать продукцию на 20 лет вперед («на наш век хватит»). Математику ясно, что оптимальное планирование этого рода должно привести к полному уничтожению всех ресурсов к концу срока (иначе оставшиеся ресурсы можно было бы использовать и, значит, план не был бы оптимальным). К счастью, планы эти «корректировались» и не исполнялись. Но все же основные тенденции выдерживались, и мы к началу перестройки, грубо говоря, съели все, что у нас было.

Попытки составить детальные «программы» экономической реформы по дням подобны попыткам планирования всей экономики и аналогичны попытке составить программу для водителя автомобиля, который должен доехать от Москвы до Санкт-Петербурга (на такой-то минуте поверни направо, на такой-то – налево). Успех может быть достигнут только за счет обратной связи, т.е. нужна не программа (траектория), а, говоря математическими терминами, векторное поле в пространстве состояний системы – механизм принятия решений в зависимости от реально достигнутого состояния, а не от календарной даты.

Кое-что из сказанного следует иметь в виду и при реформировании системы образования. Наши примеры показывают, что «нет ничего практичнее хорошей теории». Нужно, чтобы работники образования не гнались за сиюминутной практической потребностью, а всегда видели перспективные цели общества.

Поверхность и что на ней происходит

Л. АШКИНАЗИ

Проявить твердость

Для многих практических применений имеет значение то, что мы называем твердостью. Вроде бы всем понятно, что это такое. Например, твердость характера: «Не учусь и не буду учиться!»

Способов измерения твердости в технике используется несколько, и все они так или иначе имитируют условия эксплуатации – внедрение в материал чего-то, сделанного из другого, способного внедряться в него, т.е. более твердого, материала. В качестве внедряемого объекта, его называют индентором, выбирают либо стальной шарик (который, как вы понимаете, не во все можно внедрить), либо алмазная пирамидка. В разных случаях шарик, пирамидки и прилагаемые усилия разные, но критерием твердости всегда яв-

ляется размер остающегося отпечатка. В минералогии используют другой метод измерения твердости – царапают один материал другим. Обратите внимание, что если попытаться связать твердость с основными параметрами, характеризующими твердое тело, то окажется, что она связана с ними неоднозначно. Для пластичных материалов твердость опирается на предел текучести, а для хрупких – на предел прочности.

Сказать, какой материал является самым мягким, очевидно, невозможно – в мягкое все эти шарики и пирамидки будут просто проваливаться. Из металлов самый мягкий, наверное, цезий Cs, особенно в жаркую погоду (он плавится при $28,4\text{ }^{\circ}\text{C}$). Самым твердым на сегодня является алмаз, следующий за ним – нитрид бора BN (одна из модификаций). Разные грани монокристалла алмаза имеют разную твердость, но BN уступает, хотя и немного, даже менее твердой из них. Согласно публикациям одной группы авторов, был получен материал тверже алмаза – фуллерит, материал на основе молекул фуллерена C₆₀. Однако это пока что темный вопрос...

Что касается практических применений, например в качестве абразива, то важны и другие свойства: теплопроводность (зона обработки греется); химическая стойкость, причем именно в тех условиях, которые создаются в зоне реза; стоимость. Так что применяются далеко не только указанные рекордсмены.

Кроме твердости существуют еще такие понятия, как микротвердость



и, естественно, нанотвердость. Это те же твердости, но измеренные при малых нагрузках и охватывающие меньшую площадь поверхности. Для неоднородных материалов, например если мы имеем более твердые включения в менее твердую матрицу, микро- и нанотвердость могут быть разными – в зависимости от того, попали ли мы индентором, т.е. тем, что внедряем, в мягкое или в твердое место. И во втором случае результат будет выше, чем при измерении просто твердости, т.е. на относительно большом участке поверхности. Но будет ли он соответствовать твердости «истинно твердого» включения – вопрос.

Прижмись ко мне покрепче

Раз уж мы заговорили об абразивах, то пришла пора вспомнить про трение, износостойкость и адгезию. Все эти три процесса происходят на поверхности, что немедленно делает задачу на ступень сложнее, и более того – на границе двух материалов, т.е. сложность поднимается еще на ступень вверх. Формально – просто потому, что для описания ситуации требуется больше параметров: в список войдут параметры не одного материала, а двух, да еще и параметры взаимодействия (например, скорость взаимного перемещения и сила прижатия).

Чтобы представить себе, во что выльется этот ужас, рассмотрим простенькую ситуацию. Пусть материал характеризуется пятью параметрами, принимающими по пять значений каждый. В этом случае у нас, во всей нашей вселенной, будет $5^5 = 3125$ материалов – согласитесь, что это весьма скромно, в реальности их порядка на три больше. Одних только сталей человечество придумало более тысячи! А сплавов других металлов, а композитов – не счесть. Ну ладно, пусть мы такие несчастные и в нашей маленькой вселенной, находящейся то ли в стагнации, то ли в стагфляции, есть всего 3125 материалов. Но сочетаний из двух материалов будет уже 9765625 – почти 10 миллионов. А с учетом параметров взаимодействия – скоро-

сти и силы прижатия – аж 39062500. Впрочем, 10 миллионов или 40 – уже разницы нет.

И это еще далеко не все. Потому что, если говорить серьезно, у поверхности любого материала параметров существенно больше, чем у объема. Хотя причина этого не вполне чиста... Казалось бы, у поверхности параметров может быть и меньше, чем у объема. Например, возьмем плотность или удельный вес – этот параметр есть у объема, но его нет у поверхности. Расстояние между атомами – это есть и у него, и у нее. Дислокации – они есть у него и в некотором смысле (отклонения структуры от идеальной) у нее, но не факт, что у нее их больше, скорее наоборот. Так что вроде бы победитель не очевиден. Но беда в том, что поверхность – это некое идеальное, геометрическое понятие, а с точки зрения физики поверхность – это и объем! Потому что приповерхностные слои принимают участие во всех поверхностных процессах. Например, некая реакция идет на поверхности, но материал для нее подается диффузией из объема. И более того, в результате этих самых поверхностных реакций и процессов (например, испарения) состав материала вблизи поверхности изменяется, формируется приповерхностный слой, который всегда молчаливо причисляют к «поверхности». Поэтому не удивляйтесь словам Вольфганга Паули, который сказал: «Поверхность придумал дьявол».

Но изучать и исследовать поверхность и процессы на ней вообще, а трение, износ и адгезию – в частности, конечно, надо. Потому что в мире более трети энергии идет на преодоление сил трения, а четверть металла расходуется на восстановление потерь, связанных с износом деталей и узлов в машинах. Самые совершенные двигатели внутреннего сгорания тратят от 12 до 20% углеводородного горючего на преодоление своих собственных внутренних механических потерь плюс не менее 10% теряется в трансмиссии, итого – до 30% горючего расходуется на преодоление трения. А если вспомнить, что тре-

ние существенно и для работы компьютера, и для работы вашего уважаемого организма (а кстати, где именно?)...

Очень упрощенно картина трения выглядит так – материалы соприкасаются, контактируют по маленьким площадкам «истинного контакта», успевают образовать мостики единого материала, которые при движении тут же срезаются. Второй механизм трения – более твердый материал врезается своими микровыступами в менее твердый и начинает при движении пропахивать в нем борозды. Если мы хотим ослабить трение, надо прежде всего применить жидкую смазку – она частично или полностью разделит поверхности. А если такой смазки нет, то для уменьшения трения надо использовать твердые материалы (чтобы меньше «врезались» и были меньше площадки истинного контакта) и разнородные (чтобы хуже образовывался или был менее прочен «единый материал»).

Отчасти это подтверждается. Так, коэффициент трения у твердых веществ в паре алмаз/алмаз равен 0,1, в парах сапфир/сапфир (Al_2O_3) и карбид вольфрама/карбид вольфрама (WC) – 0,2, а у мягких веществ в паре алюминий/алюминий (Al) или серебро/серебро (Ag) – 1,4. Но это на воздухе, когда на поверхности есть окисленная пленка, сорбировавшая влагу и вообще все на свете. Если же поверхности очистить и поместить в вакуум, не давая загрязниться, то для алмаза мы получим коэффициент не 0,1, а 0,4, для сапфира – 0,6. Пара никель (Ni)/вольфрам (W) на воздухе имеет коэффициент трения 0,3, в вакууме – 0,6. Пары никель/никель (Ni) и медь/медь (Cu) на воздухе имеют коэффициент 0,5, а в вакууме – 4,8! Больших цифр я не встречал.

Однако человечество интересуется в основном уменьшением трения. В качестве рекордсменов обычно называют фторопласт-4, он же тефлон; в паре с тефлоном же или с металлами их коэффициент трения составляет 0,03–0,04. Если нужна большая термостойкость, то к нашим услугам «твердые смазки» – графит (C) и

дисульфид молибдена (MoS_2), обеспечивающие коэффициент трения 0,03–0,04. Он зависит от скорости и давления, так что может быть и заметно больше; это же относится и к тефлону. Низкое трение графит и дисульфид молибдена обеспечивают потому, что распадаются на микрочешуйки, т.е. на плоскости, сложенные шестиугольниками из атомов углерода. Эти плоскости слабо связаны друг с другом и легко друг по другу скользят. Правда, графит перестает быть хорошей смазкой в вакууме, его коэффициент трения возрастает катастрофически – до 0,8. Причина этого такова – чтобы быть хорошей смазкой, чешуйки графита должны хорошо держаться на обеих трущихся поверхностях, дабы на самом деле терлись чешуйки по чешуйкам, а не чешуйки по металлу. Графит хорошо держится на металле за счет дипольного момента, который возникает, если он окислен по краям, т.е. если плоскости обрамлены кислородом. На воздухе это так и есть, а в вакууме и после прогрева кислород улетает. У чешуек же дисульфида дипольный момент (связь Mo–S) есть и так, кислород им для этого не нужен. Впрочем, фторированный графит, т.е. с «обрамлением» из фтора (F), работоспособен и в вакууме.

Иногда как пример низкого трения приводят лед – при скольжении конька коэффициент трения составляет 0,015. В качестве объяснения обычно называют понижение температуры плавления льда при повышении давления. Температура плавления льда (как и нескольких других веществ) действительно понижается при повышении давления, но, согласно некоторым оценкам, этого понижения недостаточно для плавления. Поверхностный слой льда и сам по себе обладает свойствами, отличающимися от свойств объема, причем эти отличия зависят от температуры. В паре лед/лед коэффициент трения около 0,5 при низких температурах (порядка $-50^\circ C$) и 0,05–0,1 при высоких (выше $-20^\circ C$). Вы можете со временем попытаться решить эту задачу самостоятельно.

Но есть в области трения задача важнее катания на коньках. Например, трение в протезах суставов, причем в так называемых «физиологических условиях». С одной стороны, это хорошо – со смазкой. С другой стороны, принципиально важным оказывается износ – ибо продукты износа попадают в организм, который не знает, что с ними делать. Возможно, что оптимальное решение дает пара полиэтилен/керамика с коэффициентом трения 0,01.

Если и есть что-то туманнее и запутаннее трения, так это его братец – износ. В литературе рассматривается более десяти механизмов износа, и все они зависят от материалов и режима трения (скорости, давления, температуры, смазки). В целом и вообще можно лишь сказать, что износ обычно меньше, если меньше трение, потому что чем меньше сила, тем меньше разрушение. Кроме того, износ уменьшается с увеличением прочности – при прочих равных условиях прочный материал медленнее разрушается. Например, есть успешные попытки создать износостойкие покрытия на основе карбидов TiC, WC, SiC.

В литературе встречается выражение «безыносное трение». В рекламных публикациях оно означает желание привлечь покупателя. В тех же случаях, когда за ним что-то стоит, это может означать следующее. Первый вариант – это создание на поверхности структур (например, пористости или лунок), которые удерживают смазку, действительно уменьшая трение и, в какой-то мере, износ. Второй вариант, более интересный, когда происходит разделение компонентов материала (например, сплава) и один, более прочный, компонент формирует пористую структуру, а второй, более мягкий, заполняет поры или лунки, начиная играть роль смазки. Наконец, третий вариант – формирование на поверхности мягкого материала (из исходного материала и компонентов смазки слоя), который сам по себе играет роль смазки, уменьшает трение и, в какой-то мере, износ. Заметим, что если трущиеся поверхности не имеют

выхода «наружу» и могут лишь обмениваться материалом, то действительно можно получить отсутствие износа. Однако в реальной эксплуатации такие условия встречаются не всегда.

И учтите, что не только капля точит камень, но и рука человека способна изнашивать металл (см. заставку к статье). Ну и два вопроса для размышления: что в данном случае изнашивала рука и почему капля точит камень?

Ой! А есть еще трение качения, у которого совершенно другой механизм, нежели у трения скольжения (хотя дольше всего будет катиться – при прочих равных условиях – алмазный шар по алмазной плоскости), и трение верчения (что вы думаете про его механизм?).

Адгезия и клеи

Если мы посмотрим вокруг себя, то увидим, что почти все вещи сделаны из нескольких контактирующих материалов. Единственное очевидное исключение – лист бумаги, и то лишь до того, как на нем что-то будет написано. Причем количество разных материалов в одной вещи может измеряться и десятками, и сотнями. Техника все время развивалась по пути создания новых материалов и совмещения их в изделиях, и вряд ли она от этой возможности откажется. Поэтому восторженные слова насчет новой эры 3D-принтеров, что завтра сделаем компьютер, завтра сделаем двигатель, завтра то, завтра се... – все это могут писать только журналисты, не понимающие, из чего сделано то, чем и на чем они пишут. Полагающие, что мир устроен, как песок, песочница, формочки и куличики.

Техника состоит из великого множества материалов. Многие из них «просто контактируют», т.е. они не должны ни взаимодействовать, ни разрушать друг друга. Но многие должны крепко друг за друга держаться: краски – на бумаге, лыжные крепления – на лыжах, изоляция – на проводах, уплотнения – на дверце холодильника... с едой. И все эти соединения должны иметь определенную прочность на отрыв. Способность проти-

востоять попыткам отделить один материал от другого называется адгезией. Она определяет капиллярность, смачиваемость, поверхностное натяжение, она существенна для трения, склеивания, пайки, сварки, нанесения покрытий. Адгезия матрицы и наполнителя композитов влияет на их прочность.

После всего сказанного вас не должно удивить, что с теорией адгезии дело обстоит не очень хорошо. Сложности проистекают от того, что это поверхностный эффект, и от того, что если мы соединяем два разных материала, то имеем «бонус трек» – удвоенное количество параметров и умноженное во много раз количество сочетаний их значений. Существуют по крайней мере четыре механизма адгезии.

Прежде всего, между материалом и адгезивом происходит молекулярное взаимодействие, которое в некоторых случаях переходит в химическую реакцию. Электрическая теория адгезии основывается на образовании двойного электрического слоя при контакте двух тел. В этом случае влияние на прочность склеивания оказывает наличие в молекулах клеящего вещества и объекта склеивания полярных групп, и адгезия обуславливается притяжением зарядов. Диффузионный механизм – это процесс диффузии клеящего вещества в материал, в результате чего исчезает резкая граница между склеиваемой поверхностью и клеящим веществом, а переходной слой оказывается достаточно прочен. И наконец, механическое сцепление клея и материала – проникновение жидкого клея в поры склеиваемых материалов и образование (после затвердевания клея) мостиков, «заклепок». Этот процесс идет, только если хотя бы один из склеиваемых материалов пористый.

Во многих случаях от соединения нужна не просто прочность, а прочность в конкретных условиях эксплуатации – например вибро- или ударопрочность. Иногда принципиально важно что-то другое, например герметичность или низкая газопроницаемость. В вакуумной технике го-

ворят «вакуумная плотность», и там требования обычно жестче – если вы не разрабатываете бактериологическое или токсинное оружие. В вакуумной технике важно давление пара материала образующегося соединения – оно не должно быть слишком велико. Это требование ограничивает, например, выбор припоев – легкоплавкие припои часто дают шов, материал которого имеет высокое давление пара. Иногда важны электрические свойства соединения – оно должно иметь низкое сопротивление, как соединяемые металлы. Особая проблема – если мы хотим соединить пайкой два сверхпроводника. Или наоборот, высокое сопротивление, если мы соединяем диэлектрики и хотим сохранить диэлектрические свойства. В некоторых случаях важна способность пережить дальнейшие технологические процессы – например, если материалы соединяются, а потом как-то обрабатываются. Часто есть какие-то существенные ограничения на сам технологический процесс – когда соединяемые детали, скажем, нельзя сильно нагревать или когда сам процесс соединения должен происходить под водой (и нечего удивляться, существуют и подводная сварка, и склеивание под водой). При соединении хрупких материалов, т.е. стекла и керамики, с металлами должны быть согласованы коэффициенты термического расширения, иначе при охлаждении (от температуры, при которой происходит соединение) спай сам по себе разрушится – прилагать внешние усилия и не придется.

Классифицировать ситуации соединения двух материалов или деталей непросто – многие методы плавно переходят один в другой, а некоторые накладываются, порождая гибриды. Наверное, первым следует признать деление ситуаций на такие соединения: детали и материала, двух материалов и, наконец, двух деталей.

Соединение детали и материала – это нанесение всяческих покрытий (окраска), изменение поверхностного слоя посредством взаимодействия с газом или жидкостью (азотирование стали, анодирова-

ние алюминия). Вопрос о прочности нанесенного или измененного слоя возникает и в этом случае – он может отслаиваться из-за термических напряжений, возникающих при изменениях температуры, из-за вибраций и ударов.

Соединение двух материалов – это, скажем так, некоторая экзотика, но она тоже возможна: представьте себе, что вы распялете одновременно два разных вещества, а получающиеся частички тут же слипаются и образуют единый композиционный материал.

Если говорить о соединении двух деталей, то рассмотрим только неразборные, точнее – не предназначенные для разборки, соединения. Болты, винты, гайки и т.п. – по боку. А заклепки? Они тоже «неразборные», хоть их зачастую и разбирают пытливые юные «неестественно-испытатели». Наверное, надо выделить ситуации, когда между материалами возникает существенное химическое взаимодействие (межмолекулярные связи) или только физическое взаимодействие, например трение. Но, согласно современным теориям, трение тоже обязано химическому взаимодействию (механизм «сваривание–срез»). В общем, попытка дать точное определение заводит в такой лес, в такую чащу... Так что сделаем вид, что мы забыли про заклепки, и пойдем дальше.

Ситуации неразборного соединения двух деталей принято делить на случаи, когда в зону соединения не вносятся какие-либо третьи вещества, кроме двух соединяемых, и когда вносятся. Первый случай – это сварка, второй – пайка, если есть нагрев до плавления этого третьего вещества, и склейка, когда нагрева нет. Эта классификация, как и, наверное, все инженерные классификации, не жесткая; важны еще роль первооткрывателя (кто первый придумал, назвал и внедрил) и традиции. Например, есть «термокомпрессионная сварка» – детали нагреваются и сильно сжимаются, но не плавятся. И есть сварка «под флюсом», когда вещество вносится, но не становится потом частью детали, как при пайке, а лишь

(хорошенькое лишь!) защищает детали от окисления в процессе сварки.

В целом технология сварки и пайки усовершенствована достаточно, чтобы проблемы собственно прочности были решены. Иными словами, во многих случаях материал шва не менее прочен, чем более слабый из соединяемых материалов, и уж во всяком случае удовлетворяет требованиям по прочности. Сложнее обстоит дело с вибростойкостью и возможностью дальнейшей обработки. Переходные слои, которые образуются при сварке, иногда состоят из «интерметаллидов» – соединений металлов, которые бывают хрупкими. Ну, в этом случае применяют пайку. Сегодня техника сварки и пайки достигла состояния, когда большинство материалов так или иначе соединить удается и прочность соединения не уступает самым соединяемым материалам.

Но есть несколько особо сложных случаев. Один из них – соединение полиэтилена и фторопласта. И это не случайно: материалы с самым низким трением – это материалы с самой низкой адгезией. Только после сложной обработки поверхности («активирования») удастся получить прочность склейки 14 МПа – это лишь вдвое меньше, чем у самого фторопласта.

Другой сложный случай – клеи для склеивания под водой. Вообще-то они существуют, но обеспечивают довольно скромную прочность склейки – 10 МПа. Каракатицы и мидии создали такой клей давным-давно – для этого у них есть специальные клетки, да и не только они. И биологи пытаются создать подводный клей на основе клея мидий. Скорее всего, это у них получится, Интересно бы его попробовать на суше и на полиэтилене с фторопластом. Вдруг мидия и с этим справится?

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

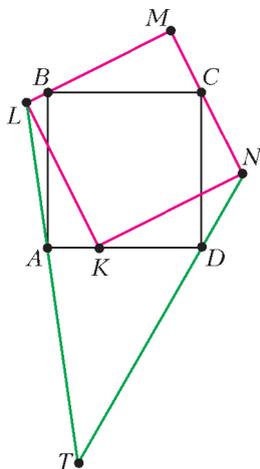
Задача M2476 предлагалась на VIII Международной олимпиаде *Romanian Master in Mathematics*, а задача M2477 – на XXIV Международной олимпиаде «Туймаада».

Автор задач Ф2481–Ф2484 – Д.Александров.

Задачи M2474–M2477, Ф2481–Ф2484

M2474. Натуральные числа x, y, z таковы, что $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$. Докажите, что они являются длинами сторон некоторого треугольника.

В.Сендеров



M2475. Дан квадрат $ABCD$. Переменный квадрат $KLMN$ расположен так, что K лежит на отрезке AD , L лежит на отрезке AB , M лежит на отрезке BC , а N лежит на отрезке CD (см. рисунок). Найдите геометрическое место точек T пересечения прямых AL и DN .

В.Расторгуев

M2476. На координатной плоскости построены графики \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 квадратичных функций $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ и $f_2(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$, причем $p_1 > 0 > p_2$. Графики \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 пересекаются в двух различных точках A и B . Четыре касательные к \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 , проведенные в точках A и B , образуют выпуклый четырехугольник, в

который можно вписать окружность. Докажите, что графики \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 имеют общую ось симметрии.

А.Заславский

M2477. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски всех остальных (но не знает, как они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все мудрецы одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

С.Берлов

Ф2481. Камень брошен со скоростью $v_0 = 17$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. С какой угловой скоростью поворачивается вектор скорости камня через $t = 1$ с после броска? Принять $g = 10$ м/с², сопротивление воздуха не учитывать. Результат выразите в радианах в секунду и округлите до десятых.

Ф2482. На гладкой горизонтальной поверхности находятся неподвижный шарик

массой $2m$ и движущийся со скоростью $v_0 = 6$ м/с шарик массой m . Происходит центральный не вполне упругий удар, так что в тепло переходит только $3/4$ от энергии, которая перешла бы в тепло при абсолютно неупругом ударе. Найдите скорость налетающего шарика после удара.

Ф2483. Шар радиусом R заряжен равномерно по объему. Потенциал центра шара (относительно бесконечности) равен $\phi(0) = 120$ В. Найдите потенциал на расстоянии $R/2$ от центра шара.

Ф2484. Оптическая система, состоящая из расположенных на общей оптической оси на расстоянии $l = 10$ см друг от друга собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $|F_2| = 5$ см, создает изображение предмета, находящегося на некотором расстоянии перед собирающей линзой. Во сколько раз изменится размер изображения, если линзы поменять местами?

Решения задач M2462–M2465, Ф2469–Ф2472

M2462. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает сыгранными, а некоторые – нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовем пятерку кандидатов перспективной, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовем кандидата универсальным, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

Ответ: да, обязательно.

Пусть $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ – состав из шести универсальных кандидатов, и пусть $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ – некото-

рый сыгранный состав кандидатов. Если шестерки A и B совпадают, то все доказано. Иначе в составе B нет какого-то игрока из A , скажем A_1 , а в шестерке B есть игрок, не входящий в шестерку A , пусть для определенности это B_1 . Тогда в сыгранном составе $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ поменяем B_1 на A_1 . Получим состав $B' = \{A_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$, который тоже сыгранный, поскольку A_1 – универсальный игрок. Если B' и A совпадают, то все доказано, иначе проводим с составом B' аналогичную операцию обмена одного игрока. Не более чем за шесть таких операций мы переведем в состав B всех игроков из A . Поскольку в процессе операций обмена сыгранность сохраняется, задача решена.

В.Брагин

M2463. Действительные числа a , b и c таковы, что $\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right| < 2$. Докажите, что для этих чисел верны также неравенства $\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| < 2$ и $\left| \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \right| < 2$.

Умножение любого из чисел a , b , c на -1 не изменяет факт истинности каждого из рассматриваемых неравенств. Кроме того, a и b из условия не равны 0. Значит, без ограничения общности можно считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$.

По условию, $\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| < 1$, значит, существует угол $\gamma \in (0; \pi)$, косинус которого равен $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, т.е. выполнено равенство $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$, или $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Построим треугольник, у которого две стороны равны a и b , а угол между этими сторонами равен γ . Пусть третья сторона этого треугольника равна c_1 . По теореме косинусов, $c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. С учетом $c \geq 0$ получаем $c_1 = c$.

Пусть α – угол нашего треугольника

напротив стороны a . Снова из теоремы косинусов имеем $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = 2 \cos \alpha$.

Требуемое неравенство $\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| < 2$ вытекает теперь из того, что $|\cos \alpha| < 1$.

Задача имеет и следующее чисто алгебраическое решение.

Заметим, что при выполнении первого неравенства $c \neq 0$ (так как при $c = 0$ имеем неравенство $a^2 + b^2 < 2|ab|$, что неверно). Сделаем равносильные преобразования неравенства при условии $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right| < 2 &\Leftrightarrow |a^2 + b^2 - c^2| < 2|ab| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 < (2ab)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - \\ &\quad - c^2 + 2ab) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((a-b)^2 - c^2)((a+b)^2 - c^2) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-b-c)(a-b+c)(a+b- \\ &\quad - c)(a+b+c) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b- \\ &\quad - c)(a+b+c) > 0. \end{aligned}$$

Неравенство приведено к симметричному виду относительно a, b, c . Аналогично, каждое из двух других неравенств из условия задачи эквивалентно этому симметричному неравенству вместе с условиями $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Л.Емельянов, П.Кожевников

M2464. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC , BH_b – высота, точка O – центр описанной окружности (рис.1). Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

Пусть M – середина AB (рис.2). Как известно, $\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$. До-

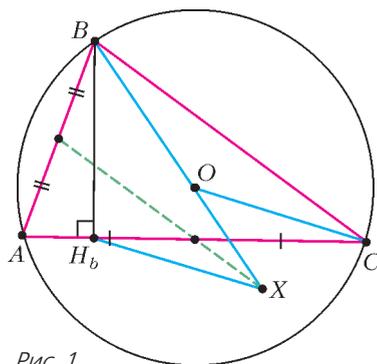


Рис. 1

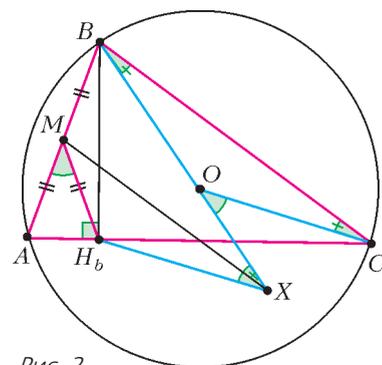


Рис. 2

статочно понять, что $MX \parallel BC$, или что $\angle MXB = 90^\circ - \angle A$. Заметим, что

$$\angle H_bXB = \angle XOC = 2\angle OBC = 180^\circ - 2\angle A.$$

Из прямоугольного треугольника ABH_b : $MA = MB = MH_b$ и

$$\angle BMH_b = \angle MAH_b + \angle MH_bA = 2\angle A.$$

В четырехугольнике BMH_bX сумма противоположных углов равна 180° , значит, он вписанный. Вписанные углы $\angle BXM$ и $\angle MXH_b$ опираются на равные хорды, следовательно, они равны. Отсюда $\angle MXB = \frac{1}{2} \angle BXH_b = 90^\circ - \angle A$, что и требовалось.

Приведем еще одно решение с использованием другой вспомогательной окружности. Пусть K – проекция B на прямую, параллельную BC и проходящую через A (рис.3). Четырехугольник $BKAH_b$ вписан в окружность с диаметром AB , поэтому

$$\begin{aligned} \angle AKH_b = \angle ABH_b &= \\ &= 90^\circ - \angle A = \angle OBC = \angle OCB. \end{aligned}$$

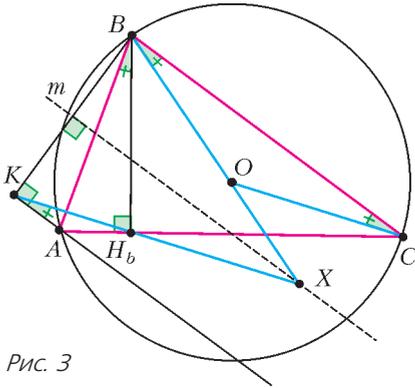


Рис. 3

Это значит, что $KH_b \parallel CO$, тем самым, X – это точка пересечения KH_b и BO . Но прямые KH_b и BO симметричны относительно серединного перпендикуляра m к BK , значит, X лежит на m . Остается заметить, что m – это прямая, содержащая среднюю линию, параллельную BC .

П. Кожевников

M2465. а) На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется хорошим, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

б) На окружности отмечены 99 точек. Каково наибольшее количество остроугольных треугольников среди всех треугольников с вершинами в отмеченных точках?

а) **Ответ:** нет, не может.

Возьмем любые четыре синие точки A, B, C, D . Докажем лемму: среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB не более двух хороших. Рассмотрим выпуклую оболочку P точек A, B, C, D . Если красная точка лежит вне P , то среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB нет хороших.

Пусть P – четырехугольник, для определенности четырехугольник $ABCD$, и E – точка пересечения его диагоналей (рис. 1). Красная точка лежит в одном из треугольников ABE, BCE, CDE, DAE ; пусть, для

определенности, она лежит в треугольнике ABE . В таком случае среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB хорошими являются только треугольники ABC и DAB . Наконец, пусть P – треугольник, для определенности треугольник ABC (рис. 2). Красная точка лежит в одном из треугольников ABD, BCD, CAD , т.е. два других точно не являются хорошими. Лемма доказана.

Оценим количество хороших треугольников, применив лемму ко всевозможным четверкам синих точек (их количество равно $C_{99}^4 = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$). Поскольку каждый хороший треугольник входит ровно в 96 четверок (четвертую синюю точку можно добавить $99 - 3 = 96$ способами), количество хороших треугольников не более чем

$$\frac{2 \cdot C_{99}^4}{96} = \frac{2 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 96} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{C_{99}^3}{2}.$$

А общее количество троек $C_{99}^3 = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

нечетно, значит, хороших троек среди них строго меньше половины. Задача а) решена.

Теперь сделаем переформулировку задачи а). Пусть O – красная точка. Проведем окружность с центром в O и заменим каждую синюю точку A на точку A' пересечения луча OA с окружностью. Легко видеть, что при такой замене хорошие треугольники остаются хорошими, а плохие – плохими (рис. 3), значит, от такой замены количество хороших треугольников не изменится. Таким образом, в пункте

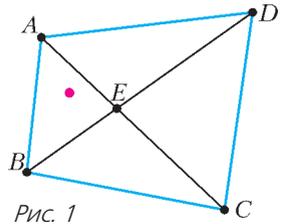


Рис. 1

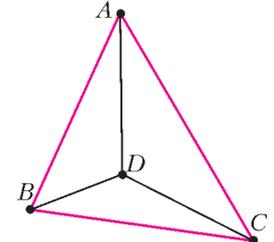


Рис. 2

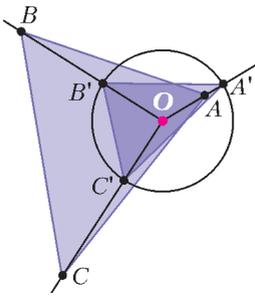


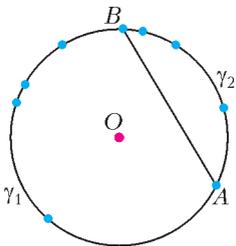
Рис. 3

а) доказано следующее. На окружности с центром O располагаются $n = 99$ синих точек, никакие две из которых не являются концами диаметра; тогда среди всех треугольников с вершинами

в синих точках меньше половины треугольников, содержащих точку O , т.е. меньше половины остроугольных треугольников. Теперь ясно, что в пункте б) требуется усилить пункт а) – дать точную верхнюю оценку на количество остроугольных треугольников.

б) **Ответ:** 40425.

Можно считать, что никакие две синие точки не являются концами диаметра, иначе при «малом шевелении» одной из этих точек количество остроугольных треугольников не уменьшится.



$$n = 9, t = 3, n - t - 2 = 4$$

Рис. 4

Оценим снизу количество тупоугольных треугольников, а точнее тупых углов вида AXB , где A, B, C – синие точки.

Зафиксируем пару синих точек A и B (рис.4). Пусть на одной из дуг с концами A и B , а именно на дуге γ_1 , расположено

$t \leq \frac{n-2}{2}$ синих точек; соответственно, на дополнительной дуге γ_2 расположено $n-t-2 \geq t$ точек. Когда X пробегает синие точки на одной из двух дуг γ_1, γ_2 , все углы AXB будут тупыми. Поэтому среди углов вида AXB , где X пробегает все синие точки, за исключением A и B , тупых углов не менее $t = \min\{t, n-t-2\}$.

Суммируем эти оценки по всем парам синих точек A, B , учитывая, что для нечетного $n = 2k + 1$ имеется ровно n пар синих точек, для которых $t = 0$ (соседние точки), ровно n пар синих точек, для которых

$t = 1$ (точки через одну), ... ровно n пар синих точек, для которых $t = k - 1$. Получаем такую оценку: тупых углов не меньше чем $n + 2n + 3n + \dots + n(k - 1) = nk(k - 1)/2$. Отсюда остроугольных треугольников не более

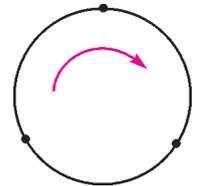
$$C_n^3 - \frac{nk(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2) - 3nk(k-1)}{6} = \frac{nk(k+1)}{6}.$$

(Заметим, что максимальная доля остроугольных треугольников среди всех треугольников с вершинами в синих точках $\frac{nk(k+1)}{6C_n^3}$ стремится к $1/4$ при $n \rightarrow \infty$.)

Оценка точна: для нечетного n она достигается, например, когда синие вершины являются вершинами правильного n -угольника (нетрудно видеть, что в случае правильного n -угольника в проведенной оценке все неравенства обращаются в равенства). При $n = 99$ получаем ответ: 40425. Отметим, что для четного n максимальное количество остроугольных треугольников достигается, когда синие вершины являются вершинами «почти правильного» n -угольника, т.е. многоугольника, полученного из правильного «малым шевелением» вершин – так, чтобы противоположные вершины не являлись концами диаметра.

С.Берлов, П.Кожевников

Ф2469. Вова, Саша и Егор одновременно начали движение с постоянными скоростями в одном направлении (по часовой стрелке) из трех равноудаленных друг от друга точек кругового мотovelотрека (см. рисунок). Через некоторое время Саша, движущийся на мотоцикле с самой большой скоростью, поравнялся с Вовой и Егором, которые в тот же момент встретились в первый раз. Какая скорость v могла быть у Саши, если Егор и Вова ехали на велосипедах со скоростями $v_1 = 10$ км/ч и $v_2 = 20$ км/ч соответ-



ственно? Известно, что скорость Саши не превышала 80 км/ч.

Пусть начальные расстояния между гонщиками были l . Рассмотрим их движение с точки зрения ехавшего медленнее всех Егора.

Возможны два варианта начального расположения гонщиков.

1) Расстояние (по ходу движения) от Вовы до Егора l , а от Саши до Егора $2l$. Тогда до встречи с Егором Вова должен проехать расстояние l со скоростью $v_2 - v_1$, а Саша за это же время, имея скорость $v - v_1$, должен преодолеть расстояния $2l, 5l, 8l \dots$ в зависимости от своей скорости движения. Так как по условию $v_2 - v_1 = 10$ км/ч, то $v - v_1 = 20, 50, 80 \dots$ км/ч. Значит,

$$v = 30 \text{ или } 60 \text{ км/ч.}$$

Большая скорость противоречит условию задачи.

2) Расстояние от Вовы до Егора $2l$, а от Саши до Егора l . Тогда до встречи с Егором Вова должен проехать расстояние $2l$ со скоростью $v_2 - v_1$, а Саша за это же время, имея скорость $v - v_1$, должен преодолеть расстояния $4l, 7l, 10l, 13l \dots$ в зависимости от скорости движения. Так как $v_2 - v_1 = 10$ км/ч, то $v - v_1 = 20, 35, 50, 65 \dots$ км/ч. Следовательно,

$$v = 30, 45, 60 \text{ или } 75 \text{ км/ч.}$$

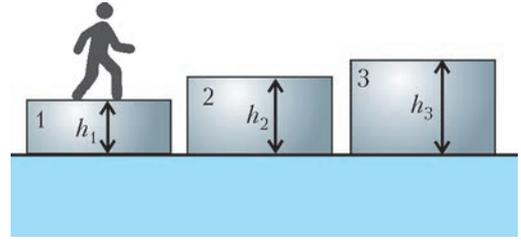
Большая скорость противоречит условию задачи.

Объединение множеств полученных величин дает следующие значения возможных скоростей Саши:

$$v = 30, 45, 60 \text{ или } 75 \text{ км/ч.}$$

М.Замятнин

Ф2470. В соленом океане плавают три небольших айсберга 1, 2 и 3, как показано на рисунке (масштабы соблюдены не везде). Каждый из них имеет форму прямоугольного параллелепипеда. На айсберге 1 стоит человек. Площади поверхностей верхних граней у айсбергов одинаковы, а высоты надводных частей равны $h_1 = 5$ см, $h_2 = 10$ см и $h_3 = 12$ см соответственно. Когда человек перешел с



айсберга 1 на айсберг 2, то при равновесии поверхности айсбергов 1 и 2 оказались на одинаковой высоте над уровнем воды. После этого человек перешел с айсберга 2 на айсберг 3. Определите, какими стали высоты надводных частей каждого из айсбергов, когда вновь наступило равновесие.

Для каждого айсберга сила тяжести, действующая на него, плюс вес человека (если на айсберге стоит человек) уравновешиваются силой Архимеда, действующей на подводную часть айсберга. Сила Архимеда равна $F_{\text{Арх}} = \rho g V$, где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения, V – объем подводной части айсберга. Этот объем подводной части можно выразить формулой $V = SH$, где S – площадь верхней грани айсберга, H – высота его подводной части. По условию задачи площади верхних граней у всех айсбергов одинаковы. Отсюда следует, что масса каждого из айсбергов плюс масса человека (если на айсберге стоит человек) пропорциональны высоте подводной части айсберга. Поэтому когда человек переходит с первого айсберга на второй, то второй айсберг погружается в воду на столько же, на сколько всплывает первый.

Когда человек перешел с первого айсберга на второй, поверхности этих двух айсбергов оказались на одинаковом уровне. Это означает, что первый айсберг всплыл на 2,5 см, а второй погрузился на 2,5 см. Высоты надводных частей айсбергов над уровнем моря стали равными 7,5 см, 7,5 см и 12 см соответственно.

Когда человек перешел со второго айсберга на третий, высота надводной части второго айсберга вернулась к исходному значению 10 см, а третий айсберг погру-

зился на 2,5 см. Высота его надводной части стала 9,5 см.

Итак, высоты надводных частей айсбергов 1, 2 и 3 стали равными 7,5 см, 10 см и 9,5 см соответственно.

М.Ромашка

Ф2471. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 1, собрана из

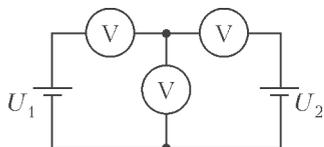


Рис. 1

двух батарей с ЭДС $U_1 = 36 \text{ В}$ и $U_2 = 12 \text{ В}$, а также трех вольтметров. Сопротивление у одного из этих приборов в два раза меньше, чем у каждого из двух других. При этом сопротивление у каждого из вольтметров все равно значительно больше внутреннего сопротивления каждой батареи. Известно, что один из вольтметров показывает напряжение 24 В.

1) Какой именно вольтметр показывает 24 В?

2) Что показывают остальные вольтметры?

3) Определите, где включен вольтметр с малым сопротивлением, а где включены вольтметры с большим сопротивлением.

Рассмотрим три подхода к решению задачи.

Возможное решение 1

Пронумеруем вольтметры и обозначим силы токов, текущих в ветвях цепи, как показано на рисунке 2. Сопротивления вольтметров обозначим R_1 , R_2 и R_3 соот-

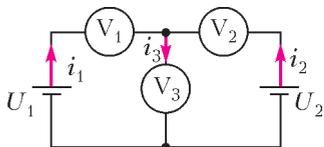


Рис. 2

ответственно. Пока что, для большего удобства записи формул, будем считать все эти сопротивления разными.

Пусть напряжение между верхним и нижним узлами цепи равно U_x . Тогда для сил

токов справедливы соотношения

$$i_1 = \frac{U_1 - U_x}{R_1}, \quad i_2 = \frac{U_2 - U_x}{R_2}, \quad i_3 = \frac{U_x}{R_3}.$$

Показания вольтметров при этом равны

$$V_1 = U_1 - U_x, \quad V_2 = U_2 - U_x, \quad V_3 = U_x.$$

Так как

$$i_1 + i_2 = i_3,$$

то из записанных уравнений получаем

$$U_x = \frac{U_1/R_1 + U_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}.$$

Сумма обратных сопротивлений в последней формуле не зависит от расположения вольтметров. Если каждый из двух одинаковых вольтметров имеет сопротивление R , то эта сумма равна

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{4}{R}.$$

Числитель в выражении для U_x зависит от того, где именно включен вольтметр с меньшим сопротивлением. Существуют три возможных варианта.

1. Меньшее сопротивление $R/2$ имеет первый вольтметр. Тогда

$$V_3 = U_x = \frac{R}{4} \left(\frac{U_1}{R/2} + \frac{U_2}{R} \right) = \frac{1}{4} (2U_1 + U_2) = 21 \text{ В},$$

$$V_1 = U_1 - U_x = 15 \text{ В},$$

$$V_2 = U_2 - U_x = -9 \text{ В}.$$

2. Меньшее сопротивление $R/2$ имеет второй вольтметр. Тогда

$$V_3 = U_x = \frac{R}{4} \left(\frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R/2} \right) = \frac{1}{4} (U_1 + 2U_2) = 15 \text{ В},$$

$$V_1 = U_1 - U_x = 21 \text{ В},$$

$$V_2 = U_2 - U_x = -3 \text{ В}.$$

3. Меньшее сопротивление $R/2$ имеет третий вольтметр. Тогда

$$V_3 = U_x = \frac{R}{4} \left(\frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R} \right) = \frac{1}{4} (U_1 + U_2) = 12 \text{ В},$$

$$V_1 = U_1 - U_x = 24 \text{ В}, \quad V_2 = U_2 - U_x = 0 \text{ В}.$$

Видно, что условию задачи удовлетворяет только третий случай. Таким образом, малое сопротивление имеет вольтметр, включенный в центральную часть цепи, а два других вольтметра имеют большие сопротивления. Напряжение 24 В показывает первый вольтметр, а два остальных вольтметра показывают напряжения 0 В и 12 В.

Возможное решение 2

Воспользуемся «методом наложения», который основан на принципе суперпозиции. Рассмотрим схемы двух вспомогательных цепей (рис. 3), в каждую из которых включена только одна из батарей,

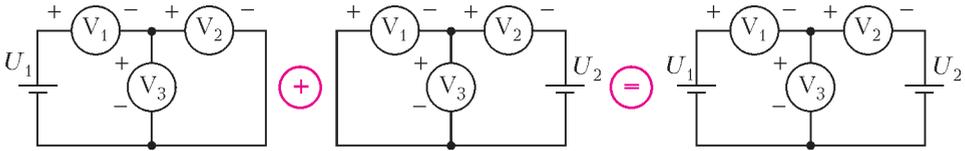


Рис. 3

а ЭДС другой батареи считается равной нулю (в общем случае внутренние сопротивления удаленных из цепи источников включают в соответствующие участки цепей, а число вспомогательных цепей равно числу источников в исходной цепи). Искомые напряжения (или силы токов) на участках цепи находят, суммируя напряжения (токи) на этом участке во всех вспомогательных цепях. Этот метод подходит только для цепей, не содержащих нелинейных элементов. Во вспомогательных цепях показания вольтметров подсчитываются очень просто – при помощи закона Ома для участка цепи, с учетом известных сопротивлений участков цепей. При этом нужно помнить о знаках вычисляемых величин.

Заполним для каждой цепи таблицу показаний вольтметров для различных воз-

можных положений вольтметра с малым сопротивлением. Получается, что меньшим сопротивлением обладает третий вольтметр, напряжение 24 В показывает первый вольтметр, а два остальных вольтметра показывают напряжения 0 В и 12 В.

Возможное решение 3

Предположим, что напряжение 24 В показывает правый вольтметр. Тогда средний вольтметр показывает 36 В, а вольтметр слева показывает 0 В. Такого, очевидно, быть не может, так как вольтметр слева обязательно что-нибудь да показывает, поскольку он подключен к батарейке с большей ЭДС.

Теперь предположим, что напряжение 24 В показывает средний вольтметр. В этом случае правый вольтметр показывает 12 В, и вольтметр слева тоже показывает 12 В. Но в какое бы место цепи мы ни включили вольтметр с меньшим сопротивлением, алгебраическая сумма токов для узла, в котором соединены все три вольтметра, при таких показаниях вольтметров не может быть равной нулю. Действительно, вычислим указанную сумму для возможных вариантов расположения вольтметра с меньшим сопротивлением. Пусть он

- а) находится слева: $12/2 - 24 - 12 \neq 0$;
- б) находится в центре: $12 - 12 - 24/2 \neq 0$;
- в) находится справа: $12 - 24 - 12/2 \neq 0$.

Остается последний вариант: напряжение 24 В показывает левый вольтметр. Тогда средний вольтметр показывает 12 В, а вольтметр справа показывает 0 В. В этом

Показания	Номер вольтметра с меньшим сопротивлением		
	1	2	3
V ₁	18 В	27 В	27 В
V ₂	18 В	9 В	9 В
V ₃	18 В	9 В	9 В

Показания	Номер вольтметра с меньшим сопротивлением		
	1	2	3
V ₁	-3 В	-6 В	-3 В
V ₂	-9 В	-6 В	-9 В
V ₃	3 В	6 В	3 В

Показания	Номер вольтметра с меньшим сопротивлением		
	1	2	3
V ₁	15 В	21 В	24 В
V ₂	9 В	3 В	0 В
V ₃	21 В	15 В	12 В

случае, очевидно, вольтметр с меньшим сопротивлением занимает среднее положение, так как на него приходится меньшее напряжение при таком же токе, как и в вольтметре слева.

П.Крюков, А.Бычков

Ф2472. Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 закреплены на концах тонкого жесткого очень легкого стержня длиной L . Этот стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закрепленного цилиндра радиусом R . В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке 1 показан вид со

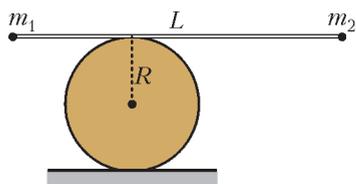


Рис. 1

стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катится по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

В исходном положении равновесия стержень касался цилиндра некоторой точкой O . Расстояния l_1 и l_2 от этой точки до шариков массами m_1 и m_2 определяются из условия равновесия стержня:

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2.$$

С учетом того что $l_1 + l_2 = L$, находим

$$l_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}.$$

Пусть стержень, перекатываясь в процессе колебаний по цилиндру, в некоторый момент времени оказался отклоненным от исходного положения равновесия на малый угол α (рис. 2). При этом стержень

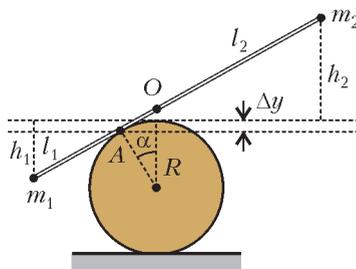


Рис. 2

касается цилиндра точкой A и $AO = R\alpha$. Потенциальная энергия шариков в поле тяжести в результате такого поворота стержня изменилась (относительно исходного значения) на $\Delta U = m_2 g h_2 - m_1 g h_1$, где разности высот h_1 и h_2 отсчитываются от исходного горизонтального положения стержня и равны $h_1 = (l_1 - AO) \sin \alpha + \Delta y$ и $h_2 = (l_2 + AO) \sin \alpha - \Delta y$, а $\Delta y = R(1 - \cos \alpha)$. С учетом того что угол α мал, т.е. $\sin \alpha = \alpha$ и $\cos \alpha = 1 - (\alpha^2/2)$, выражение для ΔU можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta U &= m_2 g h_2 - m_1 g h_1 = \\ &= m_2 g ((l_2 + AO) \sin \alpha - \Delta y) - \\ &\quad - m_1 g ((l_1 - AO) \sin \alpha + \Delta y) = \\ &= m_2 g \left((l_2 + R\alpha) \alpha - R \frac{\alpha^2}{2} \right) - \\ &\quad - m_1 g \left((l_1 - R\alpha) \alpha + R \frac{\alpha^2}{2} \right) = \\ &= \frac{(m_1 + m_2) g R}{2} \alpha^2. \end{aligned}$$

В рассматриваемый момент времени кинетическая энергия шариков равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} = \\ &= \frac{m_1 \omega^2 (l_1 - R\alpha)^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 (l_2 + R\alpha)^2}{2} = \\ &= \frac{m_1 \omega^2 l_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 l_2^2}{2}, \end{aligned}$$

где ω — угловая скорость вращения стержня, $r_1 = l_1 - AO$ и $r_2 = l_2 + AO$ — расстояния от мгновенной оси вращения A до шариков массами m_1 и m_2 соответственно.

(Продолжение см. на с. 45)

Задачи

1. а) Расставьте по одному разу цифры от 1 до 6 на места пропусков в тексте так, чтобы не возникло математических противоречий. Окончания слов можно менять. б) Сколько есть способов это сделать?

Однажды слоны сорвали ___ кокосов и ___ бананов, треть этих плодов съели, а остальное взяли с собой на прогулку. Каждый из этих ___ слонов нес по ___ плодов. Встретив ___ слоних, они отдали им все свои плоды. При этом каждой слонихе досталось по ___ плодов.

Е.Бакаев, Д.Шноль



2. Каждая грань кубика размером $2 \times 2 \times 2$ разбита на четыре квадрата



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXIII Турнире математических боев имени А.П.Савина.

1x1. Какое наибольшее количество квадратов можно закрасить так, чтобы они не соприкасались даже углами?

А.Шаповалов

3. Петя записал несколько различных натуральных чисел с суммой 92, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел мог записать Петя?

Е.Бакаев, Н.Чернятьев



4. Шестиугольник (не обязательно выпуклый), все стороны которого разной длины, разрезали на равносторонние треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться?

Е.Бакаев



XXIII Турнир математических боев имени А.П. Савина

Избранные задачи

1. (7–8)¹ Из A в B против течения отплыл катер, а через некоторое время из B навстречу ему начала двигаться лодка. Они встретились, когда катер прошел $\frac{4}{5}$ пути до B . Доплыв до B , катер развернулся и догнал лодку, затратив на это после выхода из B $\frac{3}{5}$ времени, которое требуется ему на весь путь из B в A . Через какое время после катера приплывет в A лодка, если на весь путь катер затратил 10 часов?

Я.Дрокин

2. (6–8) На доске записано натуральное число, все цифры которого различны. Петя заметил, что если подчеркнуть любые две его соседние цифры, то подчеркнутое двузначное число либо простое, либо точный квадрат. Найдите наибольшее число, которое могло быть на доске.

М.Евдокимов

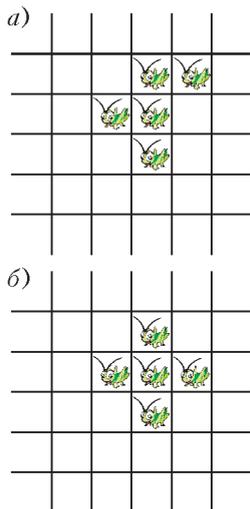


Рис. 1

3. (8) Шахматная фигура *кузнечик* прыгает на любое расстояние по горизонтали, вертикали или диагонали, причем она должна перепрыгнуть ровно одну занятую клетку и опуститься на следующую за ней свободную клетку.

На бесконечном клетчатом поле сидят пять кузнечиков в виде буквы «F» (рис. 1,а). Могут ли кузнечики через не-

сколько прыжков образовать «крест» (рис. 1,б)?

А.Шаповалов

4. (8) На окружности отмечены $2n$ точек, разбивающих ее на равные дуги. В одной из отмеченных точек сидит кролик, а в двух соседних находятся волки. За один ход каждый из них может переместиться либо в соседнюю, либо в противоположную отмеченную точку. Ходят по очереди, первый ход делает кролик, а затем ходят оба волка. Если в какой-то момент кролик окажется в одной точке с волком, его съедают. Волки могут находиться в одной отмеченной точке. При каких n кролик может бегать от волков бесконечно долго, как бы они ни ходили?

А.Грибалко

5. (8) В конференции участвовали 8 мужчин и 8 женщин. Каждый день некоторые из них читали доклад. По окончании конференции оказалось, что для каждого двух участников одного пола были два дня, в которые они оба читали доклады, но при этом ни для каких трех участников такие два дня указать нельзя. Докажите, что конференция длилась не менее 14 дней.

А.Грибалко

6. (8) Можно ли на гранях восьми одинаковых кубиков записать числа (не обязательно натуральные) так, чтобы из этих кубиков можно было составить вдвое больший куб с любой суммой от 1 до 10000000 на видимых гранях?

А.Шаповалов

7. (8) Каждая клетка квадрата $n \times n$ покрашена в один из двух цветов – черный или белый. Одним ходом разрешается выбрать любой прямоугольник 1×5 или 1×7 со сторонами, идущими по границам клеток, и перекрасить каждую из его кле-

¹ В скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась.

ток в противоположный цвет. При каких натуральных n можно гарантировать, что всю доску получится сделать белой с помощью нескольких таких ходов?

М.Артемов, Е.Бакаев, И.Раскина

8. (7–8) По кругу стоят 25 детей. Кого-то из них спросили: «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?» Известно, что 8 детей ответили: «2», 8 ответили: «1», 8 ответили: «0». Что ответил 25-й ребенок?

А.Шаповалов

9. (6-7) Петя и Вася играют в такую игру. Петя пишет на доске единицу, Вася приписывает к ней слева или справа двойку, затем Петя приписывает к полученному числу слева или справа тройку и так далее. Последним ходом Петя приписывает к текущему числу слева или справа девятку. Если полученное девятизначное число кратно 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто из них сможет победить, как бы ни играл соперник?

А.Грибалко

10. (8) Забор окружает участок, который можно было бы разбить на пять квадратов со стороной 10 метров (рис.2). Можно ли разбить этот участок на две части равной площади дополнительным забором длиной менее 14 метров?

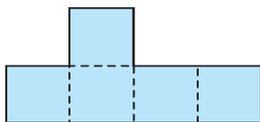


Рис. 2

А.Шаповалов

11. (8) Из бумаги вырезали несколько попарно различных треугольников. Оказалось, что среди этих треугольников есть хотя бы один не прямоугольный, а каждые два из них можно склеить по стороне так, что получится треугольник (треугольники разрешается переворачивать). Какое наибольшее количество треугольников могло быть вырезано?

А.Грибалко

12. (8) Можно ли равносторонний треугольник разрезать на пять равнобедренных треугольников, среди которых нет подобных?

М.Панов

13. (8) Существует ли такая отличная от круга фигура, ограниченная отрезками и дугами окружностей, что все отрезки, делящие пополам ее периметр, имеют одинаковые длины?

А.Заславский

14. (7) Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H , точка K – середина отрезка CH . Докажите, что угол AKB – острый.

А.Блинков, А.Заславский

15. (8) В треугольнике ABC на стороне AB и на продолжении стороны BC за точку C отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = CF = AC$. Прямые EC и AF пересекаются в точке D , точка H – основание перпендикуляра, опущенного из D на прямую AC . Докажите, что длина AH равна полупериметру треугольника ABC .

М.Волчкевич

Публикацию подготовил А.Блинков

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

Редакция «Кванта» приносит читателям свои извинения за ошибку, допущенную в прошлом номере журнала. На странице 23 были неверно указаны даты жизни Игоря Федоровича Шарыгина.

Правильные даты жизни Игоря Федоровича: 13.02.1937–12.03.2004.

Метод координат: решения без лишних вычислений

О. ИВАНОВ

«МЕТОД КООРДИНАТ» ЧАСТО ВОСПРИНИМАЕТСЯ как своего рода «отмычка», позволяющая решать вычислительные геометрические задачи. В этой статье мы тоже будем работать с координатами, но увидим, что иногда вычисления почти не требуются, а решение можно записать буквально в одну строчку.

Множества на плоскости и уравнения

Предположим, что на плоскости задана система координат. Говорят, что *множество* M задано уравнением относительно неизвестных x, y , если это множество состоит из тех и только тех точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Тем самым, уравнению $f(x, y) = 0$ сопоставляется некая «картинка» на координатной плоскости.

Например, если $f(x, y) = ax + by + c$ и при этом коэффициенты a и b одновременно не равны нулю, то уравнение $f(x, y) = 0$ задает прямую. Действительно, если $b = 0$, то уравнение преобразуется к виду $x = -\frac{c}{a}$ и, тем самым, задает вертикальную прямую. Если $b \neq 0$, то это уравнение преобразуется к виду $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$, таким образом, заданное им множество — график линейной функции.

Данная статья основана на материале тем 2 и 8 книги «Математика 10–11, приятная во всех отношениях (материалы для факультативных занятий)» и печатается с любезного разрешения издательства «СМИО Пресс».

Окружность радиусом r с центром в точке $P(x_0; y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \text{ или} \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

Действительно, точка M лежит на окружности радиусом r с центром в точке $P(x_0; y_0)$ тогда и только тогда, когда расстояние от точки M до центра P этой окружности равно ее радиусу, $MP = r$.

Используя формулу для расстояния между точками на координатной плоскости, получаем уравнение

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r, \text{ или} \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Квадратичные уравнения вида $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ (где $a \neq 0$) всегда задают либо окружность, либо точку, либо не имеют решений. Возьмем, например, уравнение $2(x^2 + y^2) + 16x - 4y + d = 0$. Преобразуем его:

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + \frac{d}{2} = 0, \\ x^2 + 8x + y^2 - 2y + \frac{d}{2} = 0, \\ (x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + \frac{d}{2} = 0, \\ (x + 4)^2 + (y - 1)^2 + \frac{d}{2} - 17 = 0.$$

При $\frac{d}{2} - 17 < 0$ получается окружность с центром $(-4; 1)$, при $\frac{d}{2} - 17 = 0$ — одна точка $(-4; 1)$, а при $\frac{d}{2} - 17 > 0$ множество решений пусто.

Упражнение 1. Найдите условия на коэффициенты уравнения $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, где $a \neq 0$, при которых это уравнение задает окружность.

В школе параболой принято называть график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (здесь коэффициент a отличен от нуля). Однако если мы повернем этот график на некоторый угол или же отразим относительно некоторой прямой, полученное множество параболой быть не перестанет. Например, уравнение $x - y^2 = 0$ задает параболу, ось которой совпадает с осью Ox . Лучше определять параболу геометрически (как

множество точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой).

Упражнение 2. Найдите уравнение множества всех точек, равноудаленных от точки $(1; 1)$ и прямой $y = -1$, и убедитесь, что это множество является параболой.

Следующее утверждение совсем не трудное (докажите его самостоятельно), но важное, поскольку показывает связь между операциями над множествами и над уравнениями.

Теорема 1. Пусть множество A задано уравнением $f(x, y) = 0$, а множество B – уравнением $g(x, y) = 0$. Тогда уравнение $f(x, y)g(x, y) = 0$ задает объединение $A \cup B$ этих множеств, а система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

задает их пересечение.

По мнению автора, эта теорема заслуживает названия «основная теорема аналитической геометрии». На самом деле, работая с уравнениями множеств, мы часто (даже не замечая того) пользуемся теоремой 1. К примеру, поскольку $(x-1)^2 - 4y^2 = (x-1-2y)(x-1+2y)$, то уравнение $(x-1)^2 = 4y^2$ задает объединение (пару) прямых $y = \frac{x-1}{2}$ и $y = -\frac{x-1}{2}$. А точки пересечения этих прямых с окружностью радиуса 2 с центром в начале координат можно найти, решив систему

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 4y^2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Изящные решения без лишних вычислений

Начнем с решения двух вычислительных задач.

Задача 1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки пересечения окружностей: с центром в точке $O_1(3; 3)$ и радиусом $r_1 = \sqrt{10}$ и с центром в точке $O_2(-5; -1)$ и радиусом $5\sqrt{2}$ (рис. 1).

Попробуем пойти стандартным путем. Надо написать уравнение каждой из данных окружностей, найти их точки пересечения, решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, а далее написать уравнение прямой, проходящей через найденные точки.

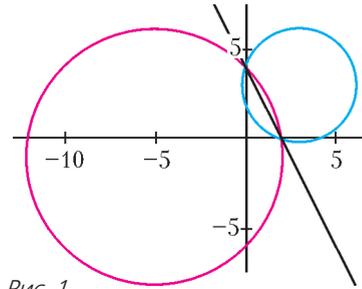


Рис. 1

Напишем уравнения данных окружностей. Первая из них задается уравнением

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10,$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 10,$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0.$$

Вторая – уравнением

$$(x+5)^2 + (y+1)^2 = 50,$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 50,$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0.$$

Таким образом, координатами точек пересечения этих окружностей являются решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Вычтя из второго уравнения этой системы ее первое уравнение, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 16x + 8y - 32 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \end{cases}$$

Выразив y через x при помощи второго уравнения и подставив это выражение в первое уравнение системы, получим уравнение для абсцисс точек пересечения данных окружностей. Имеем $y = 4 - 2x$, поэтому

$$x^2 + (4 - 2x)^2 - 6x - 6(4 - 2x) + 8 = 0,$$

или

$$5x^2 - 10x = 0,$$

откуда $x = 0$; 2. Если $x = 0$, то $y = 4$, а если $x = 2$, то $y = 0$. Таким образом, точками пересечения окружностей являются точки $A(0; 4)$ и $B(2; 0)$. Поэтому в уравнении $y = kx + b$ прямой AB $k = -2$ и $b = 4$. Таким образом, искомая прямая задается уравнением $y = 4 - 2x$.

Стоп, мы уже видели это уравнение! Это ведь в точности второе уравнение системы (1). Возможно, нам и не следовало решать эту систему? Проанализируем произведенные операции с логической точки зрения. Мы получили уравнение $2x + y - 4 = 0$ как следствие системы (1), значит, все общие точки двух множеств (окружностей), заданных уравнениями системы (1), лежат на этой прямой!

Обобщим утверждение, которое использовалось в приведенном рассуждении.

Теорема 2. Пусть множество A задано уравнением $f(x, y) = 0$, а множество B — уравнением $g(x, y) = 0$. Если множества A и B имеют общие точки, то для любых чисел a и b уравнение $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ задает множество, содержащее все точки пересечения этих множеств.

Действительно, пусть $M(x_0, y_0)$ — какая-либо общая точка множеств A и B . Следовательно, $f(x_0, y_0) = 0$ и $g(x_0, y_0) = 0$, поэтому и $af(x_0, y_0) + bg(x_0, y_0) = 0$, что и означает, что точка M лежит в множестве, заданном уравнением $af(x, y) + bg(x, y) = 0$.

Упражнение 3. (О пучке прямых, проходящих через одну точку) Пусть точка P — точка пересечения прямых, заданных линейными уравнениями $l_1(x, y) = 0$ и $l_2(x, y) = 0$. Докажите, что линейное уравнение $l(x, y) = 0$ задает прямую, проходящую через точку P , тогда и только тогда, когда существуют числа α_1 и α_2 такие, что $l(x, y) = \alpha_1 l_1(x, y) - \alpha_2 l_2(x, y)$.

Задача 2. Найдите уравнение какой-нибудь прямой, отделяющей друг от друга параболы $y = x^2 + \frac{1}{2}$ и $y = -2x^2 + 12x - 12$ (рис. 2).

Достаточно найти прямую, которая не пересекает ни одну из двух данных парабол.

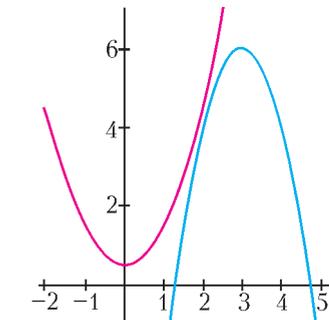


Рис. 2

Действительно, пусть старшие коэффициенты уравнений двух парабол имеют разные знаки. Тогда если прямая не пересекает ни одну из этих двух парабол, то она обязательно отделяет их, т.е. параболы располагаются по разные стороны от прямой (докажите это!).

Снова начнем с «лобового» пути решения задачи.

Можно проверить, что данные параболы не пересекаются. Действительно, уравнение

$$x^2 + \frac{1}{2} = -2x^2 + 12x - 12, \text{ или } 3x^2 - 12x + \frac{25}{2} = 0, \text{ не имеет решений, поскольку } \frac{D}{4} = 36 - \frac{75}{2} < 0.$$

Нам надо найти коэффициенты в уравнении $y = kx + b$ прямой, при которых эта прямая не пересекает ни одну из данных парабол. Уравнение $kx + b = x^2 + \frac{1}{2}$ не имеет решений, если $k^2 + 4b - 2 < 0$, или $b < \frac{2 - k^2}{4}$. Уравнение $kx + b = -2x^2 + 12x - 12$ не имеет решений, если $(k - 12)^2 - 8(b + 12) < 0$, или $b > \frac{1}{8}(k - 12)^2 - 12$. Для того чтобы найти какое-то решение системы

$$\begin{cases} b < \frac{2 - k^2}{4}, \\ b > \frac{1}{8}(k - 12)^2 - 12, \end{cases}$$

достаточно вначале найти значение k , являющееся решением неравенства

$$\frac{1}{8}(k - 12)^2 - 12 < \frac{2 - k^2}{4},$$

или

$$(k - 12)^2 - 96 < 4 - 2k^2,$$

или

$$3k^2 - 24k + 44 < 0.$$

Теперь же будем рассуждать иначе. Ясно, что если не имеет решений система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

то не имеет решений ни одна из систем

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если положить $f(x, y) = 2y - 2x^2 + 1$ и $g(x, y) = y + 2x^2 - 12x + 12$, то $f(x, y) + g(x, y) = 3y - 12x + 11$. Поэтому прямая, заданная уравнением $3y - 12x + 11 = 0$, или $y = 4x - \frac{11}{3}$, не пересекает ни одну из данных парабол.

По аналогии с теоремой 2 сформулируем теорему 3 – обобщение утверждения, на котором основывалось решение задачи 2.

Теорема 3. Пусть множество A задано уравнением $f(x, y) = 0$, а множество B – уравнением $g(x, y) = 0$. Если множества A и B не имеют общих точек, то для любых отличных от нуля чисел a и b уравнение $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ задает множество, не имеющее общих точек с множествами A и B .

Предположим, что множество, заданное уравнением $af(x, y) + bg(x, y) = 0$, имеет общие точки, например, с множеством A . Обозначим через $(x_0; y_0)$ координаты одной из таких точек. Тогда, так как $f(x_0, y_0) = 0$ и $af(x_0, y_0) + bf(x_0, y_0) = 0$, то $bg(x_0, y_0) = 0$. Поскольку по условию $b \neq 0$, то $g(x_0, y_0) = 0$. Тем самым, точка с координатами $(x_0; y_0)$ лежит и в множестве B , что противоречит тому, что по условию множества A и B общих точек не имеют.

Еще координатные доказательства «в одну строчку»

Теперь мы будем применять идеи, которые обсуждались выше, для «невычислительных» решений.

Задача 3. Пусть на плоскости заданы три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Для каждой пары из этих окружностей рассмотрим прямую, проходящую через точки их пересечения (рис. 3). Докажите, что эти прямые проходят через одну точку.

Каждая из данных окружностей задается уравнением $f_i(x, y) = 0$, где

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2, \\ i = 1, 2, 3.$$

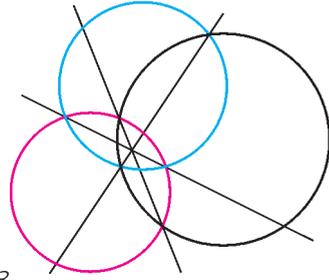


Рис. 3

Как мы видели в решении задачи 1, прямые l_{12} , l_{13} и l_{23} проходящие через точки пересечения данных окружностей, задаются уравнениями $f_1(x, y) = f_2(x, y)$, $f_1(x, y) = f_3(x, y)$ и $f_3(x, y) = f_2(x, y)$ соответственно.

Пусть $M(x_0, y_0)$ – точка пересечения прямых l_{12} и l_{13} (из условия следует, что эти прямые не параллельны). Так как $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$ и $f_1(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$, то $f_2(x_0, y_0) = f_3(x_0, y_0)$. Таким образом, точка M лежит и на прямой l_{23} , что и означает, что все эти прямые проходят через одну точку.

Изыщное рассуждение, не правда ли?

Упражнения (Радикальные оси)

Степенью точки относительно данной окружности называется число $d^2 - r^2$, где d – расстояние от этой точки до центра окружности, а r – это радиус этой окружности. Радикальной осью двух окружностей называется множество точек, имеющих равные степени относительно этих окружностей.

4. Пусть окружности заданы уравнениями $f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0$, $i = 1, 2$. Докажите, что радикальная ось этих окружностей задается уравнением $f_1(x, y) = f_2(x, y)$. (В частности, радикальной осью двух пересекающихся окружностей является прямая, проходящая через точки их пересечения.)

5. Докажите, что три попарные радикальные оси трех окружностей или пересекаются в одной точке, или параллельны, или совпадают.

6. Пусть P – точка, лежащая на радикальной оси двух окружностей. Рассмотрим две прямые, проходящие через точку P , и предположим, что первая из них пересекает первую окружность в точках A и B , а вторая пересекает вторую окружность в точках C и D . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным.

Задача 4. Рассмотрим две параболы на плоскости, пересекающиеся в четырех точ-

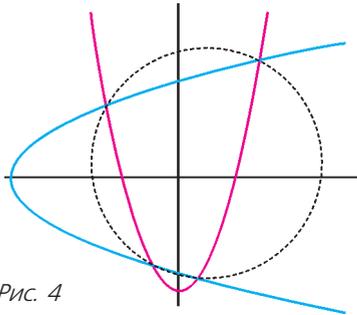


Рис. 4

ках. Докажите, что если оси симметрии этих парабол взаимно перпендикулярны, то точки пересечения этих парабол лежат на одной окружности (рис.4).

Введем систему координат, взяв в качестве осей оси симметрии данных парабол. В этой системе координат параболы задаются уравнениями $y = ax^2 + y_0$ и $x = by^2 + x_0$. Умножив первое уравнение на b , второе — на a и сложив их, мы получим уравнение

$$by + ax = ab(x^2 + y^2) + ax_0 + by_0,$$

$$\text{или } x^2 + y^2 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a} + \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a} = 0.$$

Это уравнение задает окружность, которая, в силу теоремы 2, проходит через все точки пересечения данных парабол.

Упражнения

7. Предположим, что каждая сторона одного угла пересекается с каждой из сторон другого угла. Докажите, что если биссектрисы этих углов перпендикулярны друг другу, то все четыре точки попарного пересечения сторон этих углов лежат на одной окружности.

8. Докажите, что точки пересечения кривых $x^2 + 4xy + 3y^2 = 3$ и $4x^2 - 2xy + 3y^2 = 11$ лежат на одной окружности.

Еще одна «вычислительная» задача, в которой вычислять ничего не надо.

Задача 5. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $M(4; 2)$ и через точки пересечения окружностей: с центром в точке $O_1(-1; 0)$ и радиусом 3 и с центром в точке $O_1(3; 2)$ и радиусом $\sqrt{10}$ (рис.5).

Конечно, можно найти точки пересечения данных окружностей (они будут иметь «хорошие» координаты) и затем написать уравнение окружности, проходящей через три данные точки. Но все же такой путь связан с не очень приятными вычислениями.

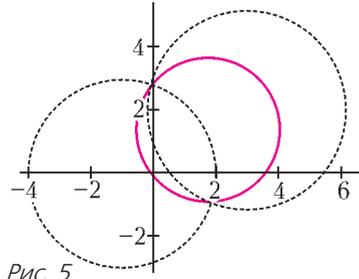


Рис. 5

Попробуем применить известный нам прием.

Уравнение первой окружности $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 - 9$. Уравнение второй окружности $g(x, y) = 0$, где $g(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 10$. При любых a и b (одновременно не равных нулю) уравнение $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ задает множество, проходящее через точки пересечения данных окружностей. Почти во всех случаях это уравнение окружности (кроме случая $a = -b$, когда это уравнение задает прямую). Остается подобрать коэффициенты a и b так, чтобы эта окружность проходила через точку $(4; 2)$, т.е. так, чтобы $af(4; 2) + bg(4; 2) = 0$. Подстановка дает $f(4; 2) = 20$, $g(4; 2) = -9$, поэтому можем взять $a = 9$, $b = -20$. Получаем ответ:

$$9((x + 1)^2 + y^2 - 9) +$$

$$+ 20((x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 10) = 0,$$

или (после раскрытия скобок и приведения подобных)

$$29x^2 + 29y^2 - 102x - 80y - 12 = 0.$$

Общий вид задачи 5 предлагаем в виде упражнения.

Упражнение 9. Пусть две пересекающиеся окружности заданы (стандартными квадратичными) уравнениями $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Тогда уравнение окружности (или прямой), проходящей через точку $M(x_0; y_0) = 0$ и через точки пересечения данных окружностей, имеет вид

$$f(x_0, y_0)g(x, y) = g(x_0, y_0)f(x, y).$$

В заключение рассмотрим еще одну задачу, решение которой основано на той же идее.

Задача 6. Даны три попарно пересекающиеся окружности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и точка P , не лежащая ни на одной из них и также не лежащая ни на одной из прямых, проходящих

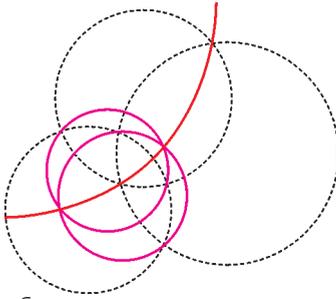


Рис. 6

щих через точки попарного пересечения этих окружностей. Рассмотрим три окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, каждая из которых проходит через точку P и через точки пересечения двух из данных окружностей γ_i (рис.6). Докажите, что эти окружности имеют помимо точки P еще одну общую точку либо касаются друг друга в точке P .

Пусть $f_i(x, y) = 0, i = 1, 2, 3$, – (стандартные) уравнения окружностей γ_i (на рисунке они черные). Пусть точка P имеет координаты $(x_0; y_0)$. Тогда, согласно упражнению 9, окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задаются, соответственно, уравнениями

$$f_2(x_0, y_0)f_3(x, y) = f_3(x_0, y_0)f_2(x, y),$$

$$f_1(x_0, y_0)f_3(x, y) = f_3(x_0, y_0)f_1(x, y),$$

$$f_1(x_0, y_0)f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0)f_1(x, y).$$

Достаточно понять, что любая общая точка двух из этих окружностей лежит и на третьей. Рассмотрим, например, общую точку $(x'; y')$ окружностей ω_3 и ω_2 . Ее координаты удовлетворяют системе

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0)f_2(x', y') = f_2(x_0, y_0)f_1(x', y'), \\ f_1(x_0, y_0)f_3(x', y') = f_3(x_0, y_0)f_1(x', y'). \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $f_3(x_0, y_0)$, второе – на $f_2(x_0, y_0)$, мы получим, что

$$\begin{aligned} f_3(x_0, y_0)f_1(x_0, y_0)f_2(x', y') &= \\ &= f_3(x_0, y_0)f_2(x_0, y_0)f_1(x', y') = \\ &= f_2(x_0, y_0)f_1(x_0, y_0)f_3(x', y'). \end{aligned}$$

Вспомним, что точка P не лежит на γ_1 , поэтому после сокращения на $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ получаем

$$f_3(x_0, y_0)f_2(x', y') = f_2(x_0, y_0)f_3(x', y'),$$

т.е. точка $(x'; y')$ лежит и на окружности ω_1 .

Наблюдая за струей воды ...

В. ДРОЗДОВ

ЗАМЕТИЛ ОДНАЖДЫ В КУХНЕ, ЧТО ДИАМЕТР вытекающей из крана струи воды уменьшается сверху вниз. Этот эффект проявляется сильнее и лучше всего наблюдается, когда напор воды средний. Ибо при сильном течении сужение струи незначительно, а при слишком слабом струя прерывиста и нечетко фиксируются ее начальный и более низкий конечный диаметры.

Измерить миллиметровой линейкой диаметр струи d_0 у носика крана и ее диаметр d на расстоянии h ниже не представляет труда. Интересно узнать, с какой скоростью v_0 вытекает вода из крана. А это непосредственно не измерить, значит, будем вычислять.

Отметим на рисунке два сечения струи. Пусть скорость воды в нижнем сечении равна v . По уравнению неразрывности струи имеем

$$S_0 v_0 = S v,$$

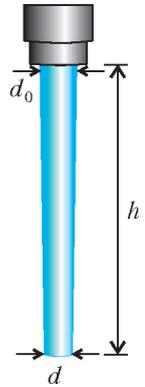
где $S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ и $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площади соответствующих сечений, или $d_0^2 v_0 = d^2 v$. Добавим к последнему уравнению очевидное кинематическое соотношение $v^2 - v_0^2 = 2gh$ и получим легко решаемую систему двух уравнений с двумя переменными v_0 и v :

$$\begin{cases} d_0^2 v_0 = d^2 v, \\ v^2 - v_0^2 = 2gh. \end{cases}$$

Выражаем из первого уравнения скорость v :

$$v = \frac{d_0^2}{d^2} v_0,$$

подставляем это значение во второе уравнение и находим искомую начальную скорость



вытекающей из крана воды:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{(d_0/d)^4 - 1}}.$$

При реальных значениях $d_0 = 15$ мм, $d = 6$ мм, $h = 210$ мм эта формула дает $v_0 = 0,33$ м/с.

Предположим, что мы забыли закрыть кран. Поставим вопрос: какая масса воды m утечет за время t ? Очевидно, что вылившийся объем воды равен $V = S_0 v_0 t$, тогда

$$m = \rho V = \rho S_0 v_0 t,$$

где $\rho = 10^3$ кг/м³ – плотность воды. Подставляя сюда величины S_0 и v_0 , получаем

$$m = \frac{\pi d_0^2 \rho t}{4} \sqrt{\frac{2gh}{(d_0/d)^4 - 1}}.$$

Пусть вода текла один час, т.е. $t = 3600$ с. Тогда получается, что $m = 209$ кг. Велика цена забывчивости, особенно если вода оплачивается по счетчику!

Теперь проверим экспериментально формулу для массы вытекающей воды. Известно, что при рассматриваемом напоре воды пятилитровый чайник наполняется за 80 с. Значит, за час вытечет

$$\frac{3600}{80} \cdot 5 \text{ л} = 225 \text{ л},$$

т.е. 225 кг воды.

Учитывая не слишком большую точность измерений, соотношение теории с опытом вполне приемлемо.

Одинокая капля в далекой вселенной

Ю. БРУК, А. СТАСЕНКО

Мы знаем, что если в мире не исчезнет миллионная часть капли воды или росинки и где-то во вселенной будет существовать в виде пара или опять жидкости, то тем более не может погибнуть или исчезнуть однажды возникшая мысль.

И.Восторгов. О судьбах России

КАК-ТО СЛУЧИЛОСЬ, ЧТО ДАЛЕКО-ДАЛЕКО – там, где нет ни молекул, ни атомов, ни излучения, – оказалась капля воды, конечно с начальным радиусом a_0 и температурой T_0 . Естественно, она начала испаряться в пустое пространство, а поскольку на испарение необходимо затрачивать энергию (вспомним хотя бы чайник на плите), то температура капли стала уменьшаться, так же как и ее масса.

Впрочем, почему капля должна непременно испаряться? Чтобы ответить на этот вопрос, поставим мысленный эксперимент. Вообразим, что каплю поместили в целлофановый

пакет, не пропускающий наружу молекулы воды. А внутри пакета образовалось столько паров воды, что наступило так называемое динамическое равновесие: сколько молекул при данной температуре испаряется с поверхности капли, столько же возвращается.

Но завершим мысленный эксперимент – уберем целлофановую оболочку. При этом молекулы разлетятся по вселенной, а новые будут поступать с поверхности капли – в первое мгновение с прежней скоростью. А поскольку термодинамическое равновесие теперь нарушено (нет обратного потока массы и тепла), температура капли начнет падать вместе с потерей массы.

И тут возникает принципиально важный (для капли) вопрос: испарится она полностью или хоть что-то от нее останется?

Рассмотрим, прежде всего, как изменяется масса капли с изменением температуры. Представим каплю в некоторый момент времени состоящей из двух частей: небольшой массы Δm , которая собирается испариться, и остающейся массы m (рис.1). И пусть в этот момент температура суммы $m + \Delta m$ этих двух масс равна T . Тогда количество тепловой энергии, необходимой для испарения массы Δm , равно $L\Delta m$, где L – удельная теплота парообразования ($[L] = \text{Дж/кг}$). Но откуда ее получить? Конечно, за счет

(Продолжение см. на с. 34)

Трисекторы

В задаче о трисекции угла требуется при помощи циркуля и линейки разделить данный угол на три равные части (или, что равносильно, построить угол, равный трети данного угла). Как и во всех классических задачах на построение, циркуль и линейка предполагаются идеальными: при помощи циркуля можно строить окружности любого радиуса (и откладывать равные отрезки на прямой), а при помощи линейки (односторонней и без делений) можно проводить прямые линии.

Эта задача, наряду с двумя другими известными задачами на построение – удвоением куба и квадратурой круга, не поддавалась математикам с античных времен. Только в XIX веке было доказано, что ни одна из этих трех задач не разрешима в общем случае. Впрочем, некоторые конкретные углы разделить на три части при этом можно. Например, не составляет труда сделать это с прямым углом.

Упражнение 1. Приведите пример угла, градусная мера которого не кратна 15° и который можно разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки.

Доказательство невозможности трисекции произвольного угла дал в 1837 году французский математик Пьер Лоран Ванцель. Как ни странно, доказательство это вовсе не геометрическое, а алгебраическое.

Если сильно упростить, то идея в следующем. Во-первых, переведем все с геометрического языка на алгебраический: любое построение циркулем и линейкой сводится к последовательному решению систем, состоящих из линейных и квадратных уравнений (так как прямая задается уравнением первой степени, а окружность – уравнением второй степени). Во-вторых, заметим, что построение угла равносильно построению двух отрезков, отношение длин которых равно косинусу этого угла. Из этого, применяя формулу косинуса тройного угла, можно получить, что угол α поддается трисекции, если уравнение $x^3 - 3x - 2 \cos \alpha = 0$ разрешимо в квадратных радикалах, а это происходит далеко не всегда.

Упражнение 2. Обоснуйте утверждение «вторых» и сведение к указанному кубическому

уравнению в приведенной выше идее доказательства. Можно ли выполнить трисекцию угла 60° ?

Тем не менее оказывается, что если использовать нетрадиционные для задач на построение инструменты, то трисекцию угла вполне можно «строить». Ниже приведено несколько примеров таких конструкций.

Транспортёр

Если у кого-нибудь есть идеальный транспортёр (рис. 1), который способен абсолютно

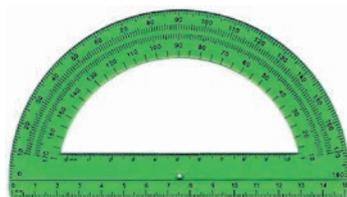


Рис. 1

точно измерять углы, то счастливый обладатель этого прибора сможет с легкостью производить трисекцию любых углов.

Далее мы рассмотрим более серьезные (во всех отношениях) способы выполнить трисекцию.

Невисс

Невиссом называется способ геометрического построения, целью которого является вписывание данного отрезка между двумя данными кривыми так, чтобы отрезок или его продолжение приходили через данную точку. Для этого используется линейка, на которой можно делать пометки. Эту линейку с отмеченным на ее краю отрезком располагают так, чтобы один из его концов попал на одну из данных кривых, а край линейки проходил через данную точку. После чего, поворачивая линейку вокруг данной точки с проскальзыванием, можно добиться того,

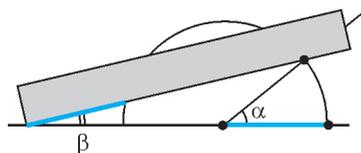


Рис. 2

чтобы второй конец отрезка попал на вторую кривую.

На рисунке 2 показана последняя стадия трисекции данного угла α при помощи невсиса. Это построение приписывают Архимеду.

Упражнение 3. Восстановите полностью построение, приведенное на рисунке 2, и докажите, что угол β действительно равен $\alpha/3$.

Можно действовать и немного по-другому. Пусть дан угол ABC , причем точки A и C выбраны так, что угол BCA прямой (рис.3).

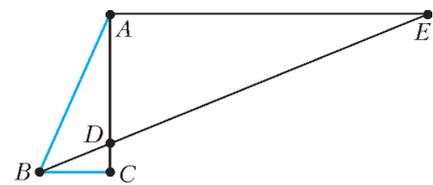


Рис. 3

Через точку A проведем прямую, параллельную BC . При помощи невсиса построим точку D на AC и точку E на этой прямой так, что $DE = 2AB$.

Упражнение 4. Докажите, что на рисунке 3 $\angle DBC = \frac{1}{3} \angle ABC$.

Томагавк

Этим воинственным словом называют конструкцию, изображенную на рисунке 4. Она состоит из полуокружности и двух перпендикулярных друг другу отрезков, один из которых отложен на продолжении диаметра полуокружности и равен ее радиусу, а второй проведен из того конца первого отрезка, который лежит на полуокружности.

Рис. 4

Упражнения

5. Выполните трисекцию данного угла при помощи томагавка.

6. Обратите внимание, что томагавк можно «построить» циркулем и линейкой. Объясните, почему, тем не менее, трисекция при помощи томагавка не противоречит тому, что трисекцию невозможно выполнить при помощи циркуля и линейки.

Угольник

Угольник – это прямой угол с «толстыми» сторонами, причем толщина обеих сторон одинакова и равна d . С его помощью тоже можно сделать трисекцию. Сначала нужно

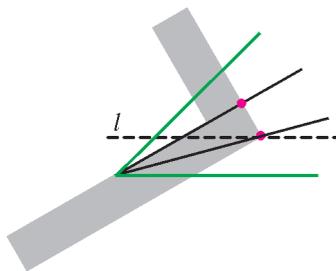


Рис. 5

сделать дополнительное построение – провести прямую l параллельно одной из сторон угла на расстоянии d от нее. Затем нужно расположить угольник так, как на рисунке 5: чтобы его внешний угол попал на прямую l , а вершина данного угла располагалась на внутренней кромке угольника. Тогда отмеченные точки будут лежать на трисектрисах данного угла.

Упражнение 7. Докажите, что описанное построение при помощи угольника – это трисекция.

Нитка

Нитку можно наматывать на катушки (т.е. цилиндры), поэтому она позволяет переносить длины дуг с окружности на окружность. Имея катушки радиусов r и $3r$, можно построить равные дуги на соответствующих ок-

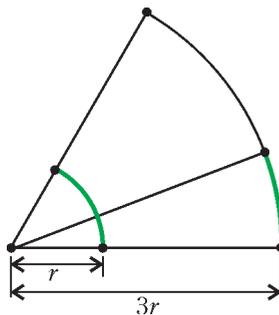


Рис. 6

ружностях (рис.6). Тогда центральные углы этих дуг отличаются в три раза.

Материал подготовил Е.Епифанов

(Окончание следует)

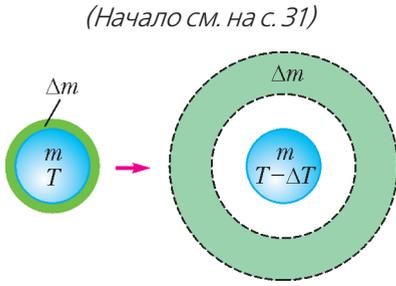


Рис. 1. Условно показано превращение жидкости массой Δm (слева) в пар массой Δm (справа), сопровождающееся охлаждением оставшейся капли массой m

охлаждения оставшейся массы m до температуры $T - \Delta T$. Соответствующая убыль тепловой энергии этой массы равна $mc\Delta T$, где c – удельная теплоемкость воды ($[c] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$).

Итак,

$$L\Delta m = mc\Delta T.$$

Разделим переменные (как говорят математики) и полученное уравнение запишем в виде

$$\frac{dm}{m} = \frac{c}{L} dT. \quad (1)$$

В начальный момент масса m_0 имеет температуру T_0 . Тогда решение уравнения (1) будет выглядеть так:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{cT_0}{L}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right)}. \quad (2)$$

Это очень распространенные уравнения – и в физике, и в других сферах человеческой практики. Если вместо приращения температуры dT записать приращение времени dt , то уравнение $\frac{dm}{m} \sim -dt$ будет описывать, например, распад радиоактивного вещества, а уравнение $\frac{dm}{m} \sim dt$ – рост банковского вклада. А желающие могут вообразить убыль массы ракеты с ростом ее скорости v : $\frac{dm}{m} \sim -dv$, откуда следует формула Циолковского $\frac{m}{m_0} \sim e^{-\frac{v}{u}}$, где u – скорость истечения массы топлива относительно ракеты.

О чем же свидетельствует зависимость (2)? Если представить себе, что температура одинокой капли устремилась к абсолют-

ному нулю, $T \rightarrow 0$, то ее (относительная) масса достигнет некоторой конечной величины $\frac{m_*}{m_0} = e^{-\frac{cT_0}{L}}$. Подставив для оценки характерные численные значения, а именно $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, $L = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, получим

$$\frac{m_*}{m_0} \approx e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

– довольно изящный, хотя и приближенный, результат. (А приближенный потому, что, интегрируя уравнение (1), мы считали L и c постоянными; между тем, они изменяются

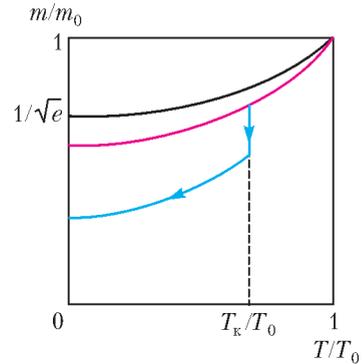


Рис. 2. Качественная температурная зависимость (относительной) массы капли по мере ее испарения

по мере охлаждения капли.) Полученная температурная зависимость массы испарившейся капли изображена на рисунке 2 черной кривой.

Однако не будем останавливаться на достигнутом. Вспомним, где мы могли взять, например, значение L . Конечно, из справочника. Но ведь там даны результаты измерений в условиях термодинамического равновесия – в присутствии пара, которого, конечно, нет в окрестности одинокой капли во вселенной. Значит, не нужно затрачивать подводимую энергию (вспомним чайник на плите) на расширение испарившейся массы Δm до равновесного давления $p = \rho_{\text{п}}RT/M$, где R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса пара. В «обычных» условиях эта дополнительная энергия равна $p(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}}) = RT/M$, где $V_{\text{п}} = 1/\rho_{\text{п}}$ и $V_{\text{ж}} = 1/\rho_{\text{ж}}$ – удельные объемы пара и жидкости, причем $\rho_{\text{ж}} \gg \rho_{\text{п}}$, $V_{\text{ж}} \ll V_{\text{п}}$.

Но вспомним еще, как создается давление: импульс молекулы i до нормального столкновения с поверхностью тела после упругого столкновения становится равным $-i$, так что каждая молекула сообщает телу импульс $i - (-i) = 2i$. Значит, пар, не возвращающийся на одинокую каплю, лишает ее части внешнего давления. В результате при испарении в вакуум не нужно совершать работу по расширению пара.

Таким образом, в уравнении (1) в знаменателе правой части вместо L окажется величина L' , меньшая L . Даже не решая это новое уравнение, можно видеть, что интенсивность убыли массы капли увеличится. Значит, теперь новая кривая температурной зависимости массы капли пройдет ниже прежней. Она изображена на рисунке 2 красной кривой.

Но тут всякий здравомыслящий отличник может воскликнуть: «Позвольте, а что же произойдет, когда температура капли достигнет значения $T_k = 273 \text{ K}$?!» Тут надо еще поразмышлять. Если вода капли абсолютно чистая, капля может оставаться жидкой даже при дальнейшем охлаждении – это так называемое метастабильное состояние. Если же в ней окажется соринка или электрический заряд, может начаться кристаллизация. При этом температура капли будет оставаться постоянной, так что убыль массы можно изобразить вертикальным отрезком. Масса

будет уменьшаться до тех пор, пока теплота кристаллизации не будет унесена испаряющимися молекулами. Наконец, когда вся оставшаяся масса охладится до температуры кристаллизации, продолжится дальнейшее уменьшение массы и температуры за счет сублимации льда. Очевидно, что этот процесс можно описать теми же соотношениями, что и при испарении жидкой капли, подставив вместо теплоты испарения и теплопроводности воды теплоту сублимации и теплоемкость льда. Соответствующий график для такой «грязной» капли изображен на рисунке 2 синей линией.

Что же получается – капля не может сама себя полностью испарить?! Даже барон Мюнхгаузен, известный своей изобретательностью, не решился утверждать, что может сам себя разорвать в мелкие клочья.

Однако вернемся к постановке проблемы. Увы, в реальной вселенной нет абсолютной пустоты и абсолютного нуля температуры. Есть, по крайней мере, реликтовое излучение с температурой $T \sim 3 \text{ K}$. И хотя бы оно (не говоря уже об излучении звезд или о потоках частиц) не дает одинокой капле жить вечно. Впрочем, эпитафия возвращает оптимизм. Тем более что, поступив в Московский физико-технический институт, вы сможете проанализировать все рассмотренные процессы гораздо подробнее.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Антипараллели И КОНИКИ

П. КОЖЕВНИКОВ

ОБРАТИМСЯ К СТАТЬЕ О. ИВАНОВА, НАПЕЧАТАННОЙ В ЭТОМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА, И ПОСМОТРИМ ЕЩЕ РАЗ НА КОНСТРУКЦИИ ИЗ УПРАЖНЕНИЯ 7 (рис.1) и из задачи 4 (рис.2). Сходство не только внешнее: как мы видели, координатные решения этих задач похожи, как близнецы. Но поговорим еще немного о

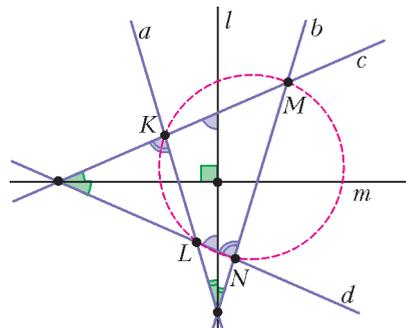


Рис. 1

геометрическом и алгебраическом родстве этих конструкций.

Для начала обсудим, как решить упражнение 7 геометрически. По условию, на рисунке

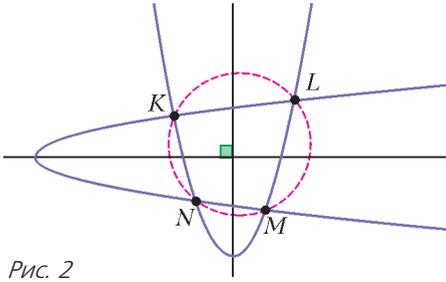


Рис. 2

ке 1 биссектрисы l и m углов между парами прямых перпендикулярны. Прямые c и d составляют равные углы с осью симметрии (биссектрисой) l угла между a и b . Пары прямых с таким свойством называют *антипараллелями*, или антипараллельными относительно пары прямых a и b . Прямые a и b получаются из прямой l поворотом на равные углы по часовой стрелке и против часовой стрелки, поэтому соответствующие углы между прямыми a и c и между прямыми b и d равны. Отсюда по известному признаку следует вписанность четырехугольника в пересечении прямых a, b, c, d . (Заметим, что эти рассуждения и вывод сохраняются и для других конфигураций антипараллелей; рис.3.) Нетрудно обратить рассуждения и

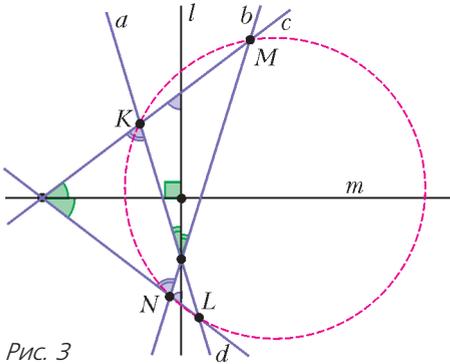


Рис. 3

доказать, что если окружность пересекает прямую a в точках K и L , а прямую b — в точках M и N , то пара прямых KM, LN (как и пара KN, ML) — это пара антипараллелей относительно пары прямых a и b . Итак, получается следующий **критерий антипараллельности**:

Пусть a и b — пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точки M и N — на прямой b (точки K, L, M, N различны). Точки K, L, M, N лежат на одной окружности тогда и только тогда,

когда KM и LN антипараллельны относительно пары прямых a и b .

Упражнения

1. Пусть a и b — пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точки M и N — на прямой b (точки K, L, M, N различны). Докажите, что прямые KN и LM антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда KM и LN антипараллельны относительно пары прямых a и b .

2. Докажите, что если прямые c и d антипараллельны относительно пары прямых a и b , то и наоборот, прямые a и b антипараллельны относительно пары прямых c и d .

3. Пусть прямые d и d' симметричны относительно биссектрисы l угла между прямыми a и b . Докажите, что прямые c и d антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда c и d' параллельны (или совпадают).

4. Пусть a и b — пара прямых, точки K, L, P лежат на прямой a и точки M, N, Q — на прямой b (все указанные точки различны) (рис.4). Дока-

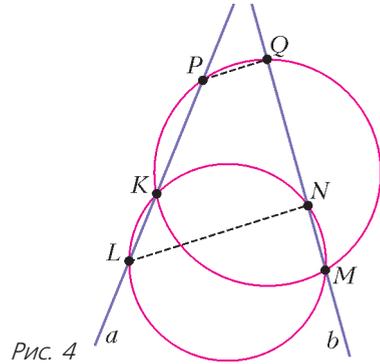


Рис. 4

жите, что если K, L, M, N лежат на одной окружности и K, M, P, Q лежат на одной окружности, то $LN \parallel PQ$.

В следующих двух упражнениях пересечение окружности и прямой «вырождается» в касание.

5. Пусть a и b — пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точка M — на прямой b . Докажите, что прямые KM и LM антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника KLM касается прямой b (рис.5).

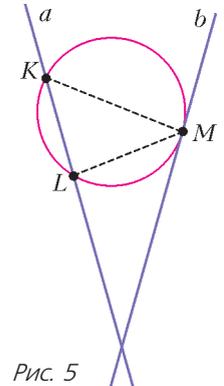


Рис. 5

6. Пусть $ABCD$ — трапе-

ция, $AD \parallel BC$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB .

Посмотрим теперь на рисунок 2 – по условию, оси данных парабол перпендикулярны. Оказывается (мы покажем это ниже), что прямые KM и LN (или KL и MN , или KN и LM) составляют равные углы с осью каждой параболы, т.е. пару прямых KL и MN по праву можно назвать антипараллельными относительно параболы. С точки зрения подходящей системы координат (оси координат параллельны осям параболы) антипараллели – это прямые, имеющие противоположные угловые коэффициенты (либо прямые, параллельные оси ординат). (То же верно и для антипараллелей относительно пары прямых a и b , если за оси координат взять прямые, параллельные биссектрисам (внутренней и внешней) углов между прямыми a и b .)

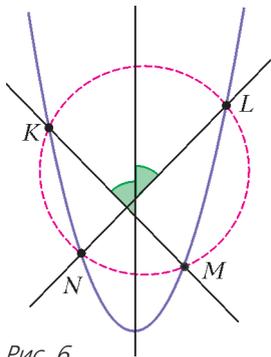


Рис. 6

Итак, для параболы верен **аналог критерия антипараллельности:**

Пусть различные точки K, L, M, N лежат на данной параболе (рис. 6). Точки K, L, M, N лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда прямые KM и LN антипараллельны.

Докажем этот критерий в духе решений из статьи О.Иванова.

Выбрав оси параболы за оси координат, считаем, что парабола задана уравнением $y = ax^2$ или уравнением $F = 0$, где $F = x^2 - y/a$. Пусть $y = kx + b$ – уравнение прямой KM , $y = -kx + c$ – уравнение антипараллели l к прямой KM , проходящей через точку L ; тогда уравнение $H = 0$, где $H = (y - kx - b)(y + kx - c)$, задает объединение этих антипараллелей. Заметим, что $H = y^2 - k^2x^2 + dx + ey + f$ для некоторых констант d, e, f . При любом фиксированном λ множество, заданное уравнением $H + \lambda F = 0$, содержит точки K, L, M (общие точки параболы и объединения прямых KM и l). Возьмем $\lambda = k^2 + 1$, тогда $H + \lambda F$ имеет вид $x^2 + y^2 + dx + gy + f$, значит, уравнение

$G = 0$, где $G = H + (k^2 + 1)F$, задает окружность, а именно описанную окружность треугольника KLM .

Получаем следующее.

Если K, L, M, N лежат на одной окружности, то N лежит на описанной окружности треугольника KLM , поэтому координаты точки N удовлетворяют уравнению $G = 0$. Так как N лежит на параболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению $F = 0$, а потому и уравнению $G - H = 0$, или $(k^2 + 1)F = 0 \Rightarrow F = 0$, значит, N принадлежит объединению прямых KM и l . Но поскольку прямая KM пересекает параболу в двух точках, точка N лежит на l , т.е. LN – антипараллель для KM .

Наоборот, если KM и LN антипараллельны, то координаты точки N удовлетворяют и уравнению $F = 0$, и уравнению $H = 0$, а значит, и уравнению $G = 0$, т.е. N лежит и на описанной окружности треугольника KLM .

Упражнения

7. Пусть точки K, L, P, M, N, Q лежат на одной параболы (рис. 7). Докажите, что если K, L, M, N лежат на одной окружности и K, M, P, Q лежат на одной окружности, то $LN \parallel PQ$.

Следующие упражнения можно вывести из предыдущих рассуждений в случае, когда пересечение «вырождается» в касание. (Можно дать и независимые вычислительные решения.)

8. Пусть K, L, M – три различные точки на параболы такие, что прямые KM и LM антипараллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника KLM касается параболы в точке M (рис. 8).

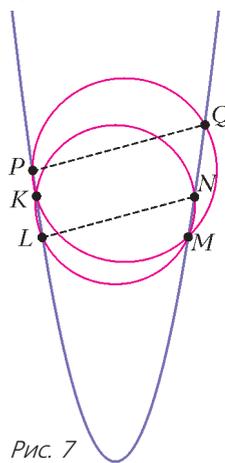


Рис. 7

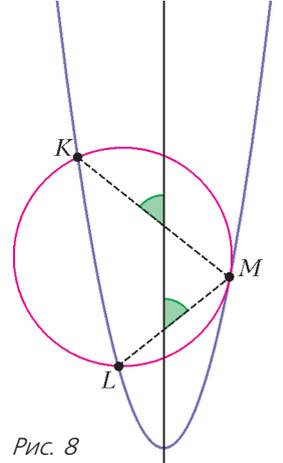


Рис. 8

9. Пусть даны две антипараллели к параболы, одна касается параболы в точке M , а другая пересекает параболу в точках K и L (точки K, L, M различные). Докажите, что описанная окружность треугольника KLM касается параболы в точке M (рис.9).

10 (С.Маркелов, Турнир городов, 2004 г.). На плоскости даны парабола и окружность, имею-

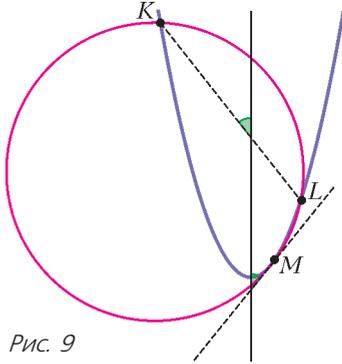


Рис. 9

щие с параболой ровно две общие точки: K и M . Оказалось, что касательные к окружности и параболы в точке M совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболы в точке K также совпадают?

Ответ: не обязательно.

Указание. Рассмотрим две антипараллели к параболы, одна антипараллель t касается параболы в точке M , а другая проходит через M и вторично пересекает параболу в точке K (рис.10). Тогда окружность, проходящая через K и касающаяся прямой t в точке M , – требуемая.

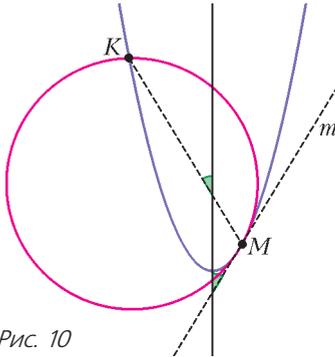


Рис. 10

11. Сформулируйте и докажите аналог утверждения упражнения 6 для двух параллельных секущих параболы.

Аналогично можно определить антипараллели относительно других кривых второго порядка (коник) – эллипса, гиперболы. При работе в данной прямоугольной системе координат получается одно и то же определе-

ние антипараллелей для большого класса \mathcal{K} кривых, задаваемых уравнением вида

$$px^2 + qy^2 + rx + sy + t = 0$$

(где коэффициенты p и q одновременно не обращаются в 0).¹ Как мы видели, в класс \mathcal{K} входит и объединение любой пары антипараллельных прямых $y = kx + b$, $y = -kx + c$. Предлагаем читателю обобщить утверждения, которые мы встретили для пар прямых и парабол. В частности, предлагаем доказать следующие утверждения:

Теорема о пересечении. Пусть α и β – две различные кривые класса \mathcal{K} , имеющие четыре общие точки (рис.11). Тогда эти точки лежат на одной окружности.

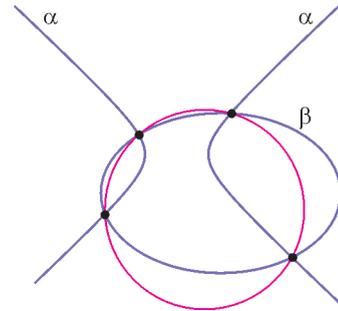


Рис. 11

Обобщенный критерий антипараллельности. Пусть дана кривая α из класса \mathcal{K} , не являющаяся окружностью, и различные точки K, L, M, N на этой кривой такие, что α не содержит целиком ни прямую KM , ни прямую LN . Точки K, L, M, N лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда KM и LN антипараллельны (рис.12).

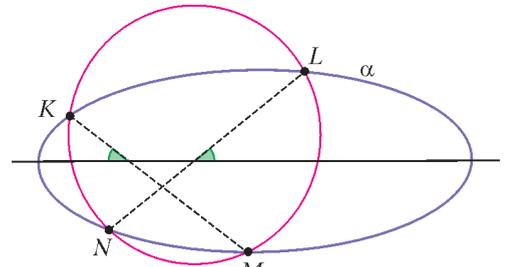


Рис. 12

¹ Кривые класса \mathcal{K} – в точности кривые второго порядка, у которых главные направления параллельны осям координат.

О границах применимости классической молекулярно-кинетической теории

С. ВАРЛАМОВ

КАК ИЗВЕСТНО, МОЛЕКУЛЫ ХАРАКТЕРИЗУЮТСЯ такими механическими параметрами: массой m и размером (диаметром) D . Масса молекулы равна M/N_A , где M – это молярная масса соответствующего вещества, N_A – это число Авогадро, т.е. число молекул в одном моле вещества. Размеры небольших молекул, например молекулы гелия, имеют порядок 10^{-10} м. При какой температуре T имеет смысл указанная величина?

При тепловом хаотическом поступательном движении молекулы имеют средние величины импульсов, в проекциях на ортогональные оси координат равные примерно

$$p_x = p_y = p_z \approx \sqrt{2mkT},$$

где k – постоянная Больцмана. Этим импульсам соответствуют длины волн де Бройля λ . Если λ меньше указанного размера D , то классическое представление о размере молекулы справедливо. Это означает выполнение неравенства

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mkT}} < D, \text{ или } \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mkD^2} < T. \quad (1)$$

Для молекул гелия соответствующая температура равна примерно 240 К. Это означает, что, например, для расчетов длины сво-

бодного пробега L молекул гелия в сильно разреженном газе с концентрацией молекул $n \ll D^{-3}$ по известной формуле

$$L = \frac{1}{n\pi D^2 \sqrt{2}} \quad (2)$$

можно пользоваться представлением о размере молекулы D порядка 10^{-10} м только при температуре $T > 240$ К. При более низких температурах нужно считать, что размер молекулы примерно соответствует длине волны де Бройля и поэтому длину свободного пробега следует вычислять по другой формуле:

$$L = \frac{\sqrt{2mkT}}{n\pi(2\pi\hbar)^2}. \quad (3)$$

Если при увеличении концентрации молекул n среднее расстояние между ближайшими соседними молекулами $n^{-1/3}$ сравнится с длиной волны де Бройля λ , то нельзя считать, что молекулы летают свободно от одного столкновения до другого, как это представляется «в классике», а следует учитывать, что молекулы непрерывно взаимодействуют со своими ближайшими соседями. Этому условию соответствует неравенство

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mkT}} \geq \frac{1}{n^{1/3}}. \quad (4)$$

Рассматривая газ, в классической физике пользуются формулой для давления $p = nkT$ (или $n = p/(kT)$). Например, при атмосферном давлении для гелия температура, при которой выполняется неравенство (4), равна примерно 3,7 К:

$$\frac{(2\pi\hbar)^2 p^{1/3}}{\sqrt{2m}} \geq (kT)^{5/6},$$

$$\text{и } 3,7 \text{ К} = \frac{1}{k} \left(\frac{(2\pi\hbar)^2 p^{1/3}}{\sqrt{2m}} \right)^{6/5} \geq T.$$

Удивительно, что полученная величина весьма близка к температуре конденсации гелия при атмосферном давлении, равной 4 К. Аналогичный расчет для водорода дает температуру 6 К. Более массивные молекулы других веществ (и молекулы водорода тоже) при атмосферном давлении начинают конденсироваться при более высоких температурах, поэтому отмеченное квантовое ограничение (4) не играет для них существенной роли.

Эта статья по существу является продолжением статьи «Молекулярно-кинетическая теория и характеристики вещества» опубликованной в «Кванте» №3 и 4 за 2017 год. (Прим. ред.)

В классической молекулярно-кинетической теории газы разделяются на три категории: одноатомные, для которых отношение молярных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме равно $C_p/C_v = 5/3$; двухатомные, для которых $C_p/C_v = 7/5$; трехатомные, для которых $C_p/C_v = 8/6$. В категорию трехатомных попадают все газы, каждая молекула которых содержит три или больше атомов.

Одноатомные молекулы (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) «по классике» не могут изменять свою кинетическую энергию, связанную с наличием у них вращательного момента количества движения (их кинетическая энергия определяется только поступательным движением). Это справедливо лишь при достаточно низких температурах, когда молекулы, вследствие малой средней энергии теплового движения, не могут часто переходить в возбужденное состояние. Потенциалы однократной ионизации молекул этих веществ составляют от 10,75 В (Rn) до 24,6 В (He). Соответственно, для перехода в первое возбужденное состояние этим молекулам нужна энергия $e \Delta U$ приблизительно от $(3/4)10 \text{ эВ} = 7,5 \text{ эВ}$ до $(3/4)24 \text{ эВ} = 18 \text{ эВ}$. Для того чтобы большинство молекул этих веществ «оставались» одноатомными, должно выполняться неравенство

$$T < \frac{e \Delta U}{k} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 7,5 \text{ В}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}} \approx 75 \cdot 10^3 \text{ К}. \quad (5)$$

Двухатомные молекулы, например состоящие из двух одинаковых по массе m атомов, отстоящих друг от друга на расстояние D , «в классике» могут изменять кинетическую энергию, связанную с вращением. Однако на самом деле это возможно, только если температура, или энергия хаотического теплового движения, больше определенной величины:

$$kT > \frac{\hbar^2}{mD^2}. \quad (6)$$

В правой части неравенства стоит квадрат кванта действия (момента количества движения) \hbar , разделенный на удвоенный момент инерции $mD^2/2$ молекулы относительно ее оси симметрии, перпендикулярной линии, проходящей через ядра атомов. Например, для молекул водорода соответствующая температура равна примерно 50 К. Поэтому в экспериментах наблюдается, что

при температурах меньше 80 К водород ведет себя как одноатомный газ.

Ограничение по температуре «сверху» для двухатомных молекул связано с тем, что при высокой средней энергии хаотического теплового движения могут возбуждаться продольные (вдоль линии, проходящей через ядра атомов молекулы) колебания молекулы.

Частота колебаний двухатомных молекул ω связана с массой m атомов (предполагается, что массы двух атомов одной молекулы одинаковы) и с «жесткостью» G эквивалентной пружины, скрепляющей эти атомы в молекуле, таким соотношением:

$$\omega^2 = \frac{2G}{m}.$$

Если частота продольных колебаний молекулы равна $\omega_{\text{колеб}}$, то эти колебания могут возбуждаться только при температурах выше определенной величины:

$$T > \frac{\hbar \omega_{\text{колеб}}}{k}. \quad (7)$$

При меньших температурах двухатомная молекула ведет себя «классически», т.е. как жесткая гантелька.

Для большого количества твердых тел, в частности металлов, в диапазоне температур от нуля до нескольких сотен градусов по Цельсию выполняется классический закон для изобарной теплоемкости – закон Дюлонга и Пти. Согласно этому закону, при изменении температуры на ΔT на каждый атом твердого вещества приходится в среднем изменение внутренней энергии, равное $3k\Delta T$. Иными словами, каждый моль атомов, входящих в состав твердого тела, имеет теплоемкость $3R$. Объясняется это в классической физике тем, что каждый атом может колебаться вблизи его положения равновесия как бы независимо от других атомов, находящихся рядом. А такому движению соответствует средняя кинетическая энергия $3kT/2$ и средняя добавочная потенциальная энергия $3kT/2$. Вот вместе и получается $3kT$.

Колебания атомов вблизи их положений равновесия на самом деле происходят согласованно. Это означает, что в твердом теле распространяются упругие волны. Однако самая большая частота ω_{max} колебаний атома вблизи положения равновесия как раз соответствует ситуации, когда смещения остальных атомов можно пренебречь и рас-

смагивать колебания каждого атома независимыми. При одинаковом устройстве внешних оболочек атомов, которым определяется вид зависимости энергии взаимодействия соседних атомов друг с другом от расстояния между их центрами, частота колебаний тем меньше, чем больше масса атомов. Если температура твердого вещества такова, что выполняется неравенство

$$kT > \hbar\omega_{\max}, \quad (8)$$

то в этом диапазоне температур закон Дюлонга и Пти для этого вещества справедлив. Соответствующая граничная температура называется температурой Дебая:

$$T_{\text{Дебая}} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k}.$$

Здесь приведена таблица значений температуры Дебая (в кельвинах) для простых веществ). Тенденцию уменьшения температуры Дебая с ростом массы атомов веществ

Hg	Se	K	Pb	Bi	Te	Na	Au	S	Sn	U	Sb	Sn серое
75	89	90	95	117	153	160	165	180	190	200	204	212
Ag	Pt	V	Pd	Ti	Cd	Zn	Cu	Li	W	Ge	C графит	Al
225	233	273	275	278	300	305	343	354	367	370	391	398
Cr	Mg	Ir	Mo	Co	Mn	Ni	Fe	Os	Ru	Si	Be	C алмаз
402	405	420	425	445	450	465	467	500	600	658	1160	1860

с похожими химическими свойствами можно увидеть на примере таких групп веществ: а) медь, серебро, золото; б) алмаз, кремний, германий, олово, свинец; в) литий, натрий, калий. Для бериллия и алмаза, например, температуры Дебая равны примерно 10^3 К и $2 \cdot 10^3$ К. Поэтому для этих веществ закон Дюлонга и Пти при нормальных (комнатных) температурах не выполняется.

Как вы заметили, во все формулы, ограничивающие «классику» в области молекулярно-кинетической теории, входит основная квантовая величина \hbar . В формуле (5), правда, она «спрятана» в ΔU .

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Узоры под скамейкой

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Посмотрите на фотографии, приведенные здесь и на обложке. Оказывается, узоры под скамейкой нарисованы... мхом. Эти фотографии заставляют вспомнить и об известной примете – мох растет на северной стороне дерева, и о мегалитических сооружениях (например, знаменитом Ньюгрейндже в Ирландии) – сюда солнечный свет проникает раз в году. Подробную информацию и о том и о другом, а также очень красивые картинки можно найти по ключевым словам в интернете.

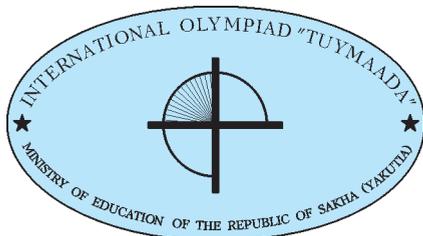
Решетчатая структура сидений скамеек вместе с их расположением на лесной поляне (где окружающие деревья ограничивают распространение прямого солнечного света) и характером суточного движения солнца по небосводу обеспечивают неравномерное проникновение света под скамейки в течение суток. А пространственное распределение солнечной освещенности визуализируется мхом.



Правда, на фотографиях можно заметить, что мох растет скорее на освещенных, нежели на теневых участках земли. Вероятно, в отличие от роста мха на деревьях, в данном случае из двух факторов – доступности влаги и доступности освещения – освещение оказывается доминирующим. (Впрочем, здесь явно сказывается еще и третий фактор – вытаптывание.)

В. Птушенко

XXIV Международная олимпиада «Туймаада»



Международная олимпиада школьников «Туймаада» проводится в Якутии ежегодно, начиная с 1994 года. С самого начала эта олимпиада была задумана не только как международная (кроме школьников из разных регионов России, в разные годы в ней участвовали представители Румынии, Болгарии, Монголии и других стран), но и как многопредметная – в состав олимпиады входят соревнования по математике, физике, химии и информатике.

МАТЕМАТИКА

В последние 18 лет олимпиада по математике в значительной степени составляется членами жюри Петербургской олимпиады школьников по математике; опытный читатель без труда заметит, с одной стороны, некоторое стилистическое родство двух олимпиад, а с другой – присущий международным математическим соревнованиям технический уклон.

МЛАДШАЯ ЛИГА

Первый день

1. Функции f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-100; 100]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x) - g(y) = k$ нечетно.

А. Голованов

2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P под прямым углом (рис.1). Точка Q на отрезке PC выбрана так, что $AP = QC$. Докажите,

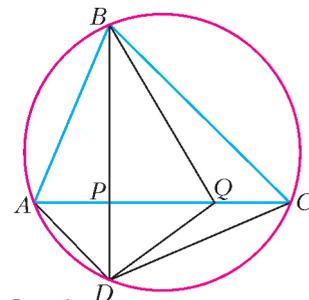


Рис. 1

что периметр треугольника BQD не меньше чем $2AC$.

А. Кузнецов

3. В стране любые два города соединены либо прямым автобусным, либо прямым авиасообщением. *Клика* – это набор городов, попарно соединенных авиарейсами. *Клюка* – это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами и при этом таких, что из них выходит поровну автобусных рейсов. *Кляка* – это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами и при этом таких, что из любых двух из них выходит разное число автобусных рейсов. Докажите, что размер любой клики не превосходит произведения размеров максимальной (по количеству городов) клюки и максимальной кляки.

П. Борг, И. Каро

4. В прямоугольном треугольнике все стороны рациональны, а площадь равна S . Докажите, что существует прямоугольный треугольник, не равный исходному, у которого все стороны рациональны и площадь равна S .

С. Чень

Второй день

5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL (рис.2). На основании BC выбрана точка D , а

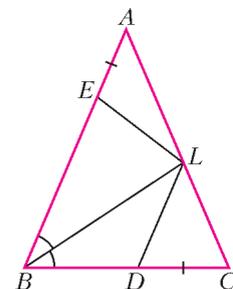


Рис. 2

на боковой стороне AB – точка E так, что $AE = \frac{1}{2}AL = CD$. Докажите, что $LE = LD$.

А. Кузнецов

6. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму натуральных делителей числа n . Дано натуральное число $N = 2^r b$, где r и b – натуральные числа, причем b нечетно. Известно, что $\sigma(N) = 2N - 1$. Докажите, что числа b и $\sigma(b)$ взаимно просты.

Дж. Анталан, Дж. Дриз

7. Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольничков со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольничков можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?

А. Голованов

8. Дан граф с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_{2017}, B_1, B_2, \dots, B_{2017}$ и ребрами $A_i B_i, A_i A_{i+1}, B_i B_{i+1}$ (в циклической нумерации). Верно ли, что при любом начальном расположении в вершинах графа 4 полицейских смогут поймать вора? (Сначала делает ход каждый полицейский, потом вор, потом снова полицейские, потом снова вор и т.д. Ход состоит в том, что персонаж либо остается в той вершине, где был, либо перемещается в соседнюю вершину. Все видят, где находятся остальные, полицейские могут координировать свои действия. Вор пойман, если он окажется в одной вершине с полицейским.)

Т. Болл, Р. Белл, Дж. Гузман, М. Хансон-Колвин, Н. Шоншек

СТАРШАЯ ЛИГА

Первый день

1. См. задачу 1 младшей лиги.
2. См. задачу 2 младшей лиги.
3. См. задачу 4 младшей лиги.
4. См. задачу М2477 «Задачника «Кванта»».

Второй день

5. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что $f(1/2017) = 1/2018$ и $f(1/2018) = 1/2017$ и два его коэффициента целые?

А. Храбров

6. См. задачу 6 младшей лиги.

7. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E (рис. 3). Луч EC вторично пересекает окружность ω , описанную около треугольника

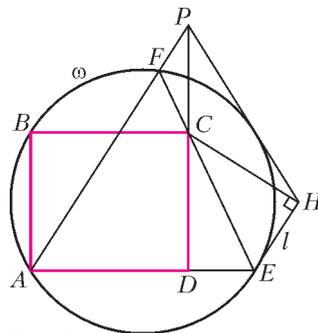


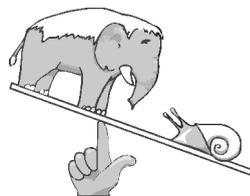
Рис. 3

ABE , в точке F . Лучи DC и AF пересекаются в точке P . На прямую l , проходящую через точку E параллельно прямой AF , опущен перпендикуляр CH . Докажите, что прямая PH касается окружности ω .

А. Кузнецов

8. На плоскости даны две точки A и B . Назовем точку X их *нелепой серединой*, если на плоскости существует такая декартова система координат, что точки A и B имеют в ней неотрицательные координаты, причем абсцисса точки X в этой системе равна среднему геометрическому абсцисс точек A и B , а ордината – среднему геометрическому ординат A и B . Найдите геометрическое место всех нелепых середин точек A и B .

К. Тыщук



ФИЗИКА

Участники олимпиады по физике соревновались как обычно в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на

любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге — за исключением тем, относящихся к выпускному классу).

Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (achudn@mail.ru) — лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании методического пособия: *А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян, А.Б.Акимов, А.И.Бычков, С.Д.Варламов, В.В.Ефимов, А.Р.Зильберман, В.И.Плис, Г.М.Тарнопольский. XXIV Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур.* Методическое пособие / под ред. А.В.Чудновского — М.-Якутск, 2017.

Теоретический тур

СТАРШАЯ ЛИГА

Задача 1. Катер и баржа

Катер, равномерно тянущий баржу на длинном тросе, движется с ней в α раз медленнее, чем без нее, при той же силе тяги винта. Если, двигаясь с баржей, катер выключит двигатель, то баржа до полной остановки пройдет в β раз большее расстояние, чем катер. Во сколько раз масса баржи больше массы катера? Сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости.

В.Ефимов

Задача 2. Капля в трубке между сосудами

Два одинаковых жестких сосуда наполнены разными идеальными газами, имеющими температуры T_1 и T_2 (причем $T_1 < T_2$), и соединены тонкой горизонтальной цилиндрической трубкой длиной L , посередине которой находится в равновесии капля ртути, не смачивающая стенки трубки. Объем газа в трубке составляет очень малую долю от объема одного сосуда. Как изменится положение капли, если увеличить температуру в обоих сосудах на одинаковую величину ΔT ?

С.Варламов

Задача 3. Конденсаторы и катушка

Изначально незаряженные конденсаторы емкостями C_1 и C_2 и идеальный источник ЭДС \mathcal{E} соединили последовательно, а затем в нулевой момент времени параллельно кон-

денсатору емкостью C_1 подключили катушку индуктивностью L .

1) В какой момент времени t_1 сила тока через катушку впервые будет максимальной?

2) Найдите максимальную силу тока I_0 через катушку.

3) В какой момент времени t_2 напряжение на конденсаторе емкостью C_2 впервые будет максимальным?

4) Найдите максимальное напряжение U_2 на конденсаторе емкостью C_2 .

А.Зильберман

Задача 4. Деревянный сердечник

На цилиндрическую часть длинного остро заточенного осесимметричного деревянного карандаша намотали плотно в один слой много витков тонкого провода, а его концы замкнули между собой. Карандаш с проводом можно считать однородным цилиндром массой m и поперечным сечением S . Карандаш аккуратно поставили грифелем вниз на горизонтальную шероховатую поверхность, включили внешнее однородное вертикальное магнитное поле индукцией B , затем охладили провод, переводя его в сверхпроводящее состояние, после чего карандаш вышел из положения неустойчивого равновесия.

1) Найдите угол ϕ_0 отклонения карандаша от вертикали в положении устойчивого равновесия.

2) Найдите период малых колебаний карандаша в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии карандаша в положении устойчивого равновесия, если известно, что эти колебания возможны.

А.Чудновский

Задача 5. Угловой отражатель и осколок линзы

Два полубесконечных плоских зеркала расположены взаимно перпендикулярно и касаются друг друга своими краями, образуя угловой отражатель. Большой из осколков тонкой собирающей линзы радиусом R с фокусным расстоянием $2r$, расколотой точно вдоль хорды, проходящей на расстоянии r от центра линзы, расположен так, что его главная оптическая ось перпендикулярна первому зеркалу, линия раскола параллельна второму зеркалу, а оптический центр удален от первого и второго зеркал на расстояния $5r$ и

$2r$ соответственно. Точечный источник света находится на главной оптической оси осколка и удален от него и от первого зеркала на расстояния $3r$ и $8r$ соответственно.

1) При условии $R \gg r$ найдите все изображения источника в описанной оптической системе и отметьте их положения относительно нее на клетчатой бумаге, приняв сторону клетки равной r . Если какое-то изображение лежит не точно на пересечении

линий сетки, то укажите вычисленные значения расстояний от этого изображения до плоскостей обоих зеркал.

2) Найдите количество N изображений для каждого из шести вариантов: $R/r \in \{3; 5; 10; 20; 40; 80\}$. Изображения, созданные разными элементами оптической системы и оказавшиеся в одной точке, считаются различными.

А. Чудновский

ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ

СТАРШАЯ ЛИГА

Андрей Космин (Andrei Cosmin), Румыния – диплом I степени,
Алина Гаухартас (Alina Gaukhartas), Казахстан – диплом II степени,
Рузван Михай Урсу (Răzvan Mihai Ursu), Румыния – диплом II степени,
Штефан Долтяну (Stefan Dolteanu), Румыния – диплом II степени,
Тенгиз Ибраев (Tengiz Ibrayev), Казахстан – бронзовая медаль,
Джошуа Тео Вэй Херн (Joshua Teo Wei Hern), Сингапур – бронзовая медаль,
Олжас Жакунов, Россия, Новосибирская область – похвальная грамота,
Василий Ючюгаев, Россия, Республика Саха (Якутия) – похвальная грамота,

Юрий Мартынов, Россия, Республика Саха (Якутия) – похвальная грамота;

МЛАДШАЯ ЛИГА

Диар Туленов (Diyar Tulenov), Казахстан – диплом I степени и кубок,
Чиа Цзынь Цюань Мэтью (Chia Jin Quan Matthew), Сингапур – диплом II степени,
Андрей Коман (Andrei Coman), Румыния – диплом II степени,
Ярослав Бассов (Yaroslav Bassov), Казахстан – диплом III степени,
Раджа Дишафня Ачади (Raja Dishafnya Achadi), Индонезия – диплом III степени,
Тимур Хисматулин, Россия, Калининградская область – похвальная грамота,
Андрей Дьякону (Andrei-Călin Diaconu), Румыния – похвальная грамота.

Публикацию по математике подготовили А. Голованов, К. Кохась; по физике – А. Чудновский, Ю. Григорьев

(Начало см. на с. 21)

Поскольку механическая энергия данной колебательной системы сохраняется неизменной, то

$$\Delta U + W = \frac{(m_1 + m_2)gR}{2} \alpha^2 + \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{2} \omega^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем

$$\frac{(m_1 + m_2)gR}{2} \cdot 2\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{2} \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

С учетом того что $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{(m_1 + m_2)gR}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \alpha = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{(m_1 + m_2)^2 gR}{m_1 m_2 L^2} \alpha = 0.$$

Отсюда следует, что период этих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi L}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}.$$

М. Семенов, А. Якута

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

ФИЗИКА

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по физике в 2016/17 учебном году проходила в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный (для 10–11 классов – очно в МГУ и в регионах, для остальных классов – дистанционно). Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только ответы) и творческой части (проверялись и оценивались решения). На заключительный этап приглашались победители и призеры отборочного этапа, а также победители и призеры прошлогодней олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий обоих туров олимпиады для 10–11 классов.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Часть I (тестовое задание)

1. (10 баллов) На горизонтальной поверхности лежит однородный кубик. Чтобы заставить его скользить по поверхности, надавив в горизонтальном направлении на центр его боковой грани (перпендикулярно этой грани), нужно приложить силу не менее 14 Н. На некотором расстоянии от него стоят второй однородный кубик. Масса этого кубика в 2 раза больше, чем у первого, а коэффициент трения о поверхность точно такой же. Обращенные друг к другу грани кубиков параллельны и перпендикулярны линии O_1O_2 , соединяющей их центры. Между кубиками вставили невесомую пружину, ось которой совпадает с O_1O_2 . Пружина изначально не деформирована (ее длина в точности равна расстоянию между кубиками). С какой минимальной *постоянной* силой нужно давить на центр боковой грани первого кубика в направлении второго (сжимая пружину), чтобы в результате этого воздействия второй кубик сдвинулся с места? Пружина не изгибается, кубики не отрываются от поверхности. Ответ запишите в ньютонах, при необходимости округлив до целого значения.

2. (7 баллов) Два сосуда объемами $V_1 =$

$= 6$ л и $V_2 = 14$ л соединены небольшой узкой трубочкой с вентиляем. Первоначально вентиль закрыт и в первом сосуде находится влажный воздух с относительной влажностью $r_1 = 70\%$, а во втором – с относительной влажностью $r_2 = 50\%$. Температура воздуха в обоих сосудах одинакова. Затем вентиль открывают. Какой будет относительная влажность воздуха после установления равновесия, если температура останется прежней? Ответ запишите в процентах.

3. (8 баллов) На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F = 12$ см падает сходящийся пучок света. Пройдя линзу, пучок сходится на оптической оси в главном фокусе линзы. На каком расстоянии от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить собирающей с тем же по величине фокусным расстоянием? Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до целого значения.

Часть II (творческое задание)

Опыты профессора Вагнера

1. Горка профессора Вагнера

Однажды летом на своей даче профессор Вагнер соорудил горку. Наклон горки к горизонту был невелик, $\alpha = 10^\circ$, но скатываться с нее нужно было с помощью приспособления из двух цилиндрических тонкостенных труб и ровной тяжелой доски (рис. 1). Трубы устанавливались на наклонную плоскость горки так, что их оси были горизонтальными и лежащая на них доска тоже была горизонтальной. На доске размещался груз,

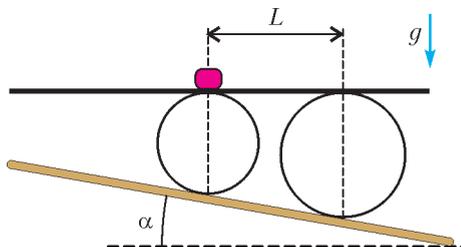


Рис. 1

и затем система отпускалась без начальной скорости. В одном из случаев небольшой груз был размещен над осью меньшей по диаметру трубы. При этом расстояние по горизонтали до оси большей трубы равнялось $L = 1,46$ м. Профессор измерил время от старта до того момента, когда груз оказался над осью большей трубы. Какой результат он получил (его секундомер отсчитывает время с точностью 0,1 с)? Масса одной из труб в $k = 2$ раза, а другой – в $n = 3$ раза превосходит массу доски. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8$ м/с². В процессе скатывания в пределах исследуемого интервала времени доска не отрывалась от труб и не скользила по ним, груз не скользил по доске, а трубы не скользили по горке. Трение качения не учитывать.

2. Поиски холодильника

В одной из своих установок по изучению процессов образования топологически нетривиальных жидкокристаллических структур профессор Вагнер для плавного вращения резервуара использовал в качестве двигателя тепловую машину. Рабочим телом этой машины были несколько молей неона. Цикл рабочего тела показан на рисунке 2 в

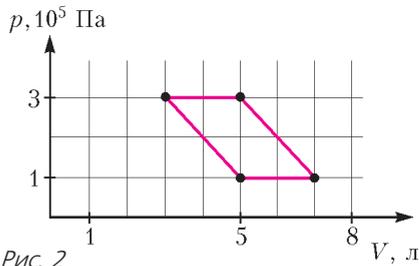


Рис. 2

координатах давление – объем. Укажите участки цикла, на которых газ отдает тепло холодильнику, т.е. определите координаты точек, которые являются началом и концом такого участка (или участков, если их несколько). Пренебрегая всеми потерями (кроме передачи тепла холодильнику), найдите КПД этой тепловой машины.

3. Электростатическая шкатулка

Как-то профессор Вагнер решил собрать оригинальную электростатическую шкатулку. Из гладких непроводящих «уголков» он изготовил каркас в форме правильного тетраэдра с длиной ребра a . «Уголки» не позволяли пластинам в форме правильных треу-

гольников, вставленных на место граней тетраэдра, смещаться вдоль плоскости грани или внутрь тетраэдра, но совершенно не мешали им выскальзывать наружу. На каждую из четырех пластин был равномерно нанесен заряд $q < 0$, а в центре тетраэдра профессор закрепил маленький непроводящий шарик с зарядом $Q > 2|q|$. Вагнер вложил пластины в грани каркаса. Затем он начал медленно закачивать внутрь тетраэдра воздух, повышая его давление. При какой разности давлений внутри и снаружи шкатулка рассыпалась? Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

4. На перегибе

В старых лабораторных журналах профессор Вагнер нашел отчет об одном из своих экспериментов. В этом эксперименте изучалось скатывание маленькой шайбы по однородному пластиковому профилю без начальной скорости (рис.3). В журнале была таблица зависимости тормозного пути шай-

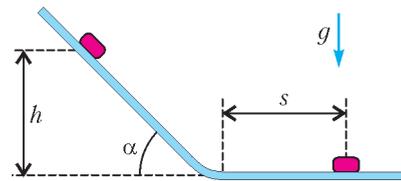


Рис. 3

бы s на горизонтальном участке профиля от высоты точки старта h на наклонном участке при некотором значении угла наклона α (табл. 1). Кроме того, там также была табли-

Таблица 1

$h, \text{м}$	0,350	0,400	0,450	0,500	0,550
$s, \text{м}$	0,148	0,171	0,194	0,217	0,240
$h, \text{м}$	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800
$s, \text{м}$	0,262	0,285	0,308	0,331	0,354

ца зависимости s от угла наклона α при $h = 20$ см (табл. 2). На основании данных профессора определите: при каком значении α проводилась серия опытов, результаты которой приведены в таблице 1, и чему равен коэффициент трения шайбы о поверхность

Таблица 2

$\alpha, ^\circ$	30	40	50	60
$s, \text{м}$	0,023	0,07	0,086	0,088

профиля (известно, что он одинаков для всех участков поверхности). Каковы величины возможных ошибок ваших результатов? Профессор вспомнил, что профиль на участке сопряжения наклонного и горизонтального участков всегда изгибался с одним и тем же радиусом кривизны, причем этот радиус был значительно больше размеров шайбы и – в большинстве опытов – заметно меньше h . Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Данные таблицы 1 получены с точностью $\pm 2 \text{ мм}$, а данные таблицы 2 – с точностью $\pm 1^\circ$ и $\pm 1 \text{ мм}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Вариант 1

ЗАДАНИЕ 1

Вопрос. Три одинаковых груза массой $m = 100 \text{ г}$ связаны попарно (1-й со 2-м, 2-й с 3-м) двумя легкими нерастяжимыми нитями. Верхний груз поднимают вверх с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$, два других поднимаются за ним. На сколько различаются силы натяжения верхней и нижней нитей? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Задача. На гладком вертикальном стержне надеты три шайбы, которые при скольжении по стержню остаются горизонтальными (рис.4). Нижняя шайба массой $2m$ покоится на жестком упоре, вторая – массой m – покоится на невесомой длинной пружине жесткостью k , соединяющей ее с первой. Ось пружины совпадает с осью стержня. Третью шайбу, масса которой также m , сначала удерживают на некоторой высоте над второй, а затем аккуратно отпускают. При какой максимальной величине этой высоты вторая и третья шайбы, мгновенно слипшиеся в результате неупругого соударения, будут совершать гармонические колебания? Ускорение свободного падения равно g .

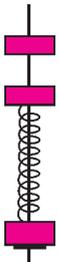


Рис. 4

ЗАДАНИЕ 2

Вопрос. Найдите разницу молярных теплоемкостей идеального газа в изобарном и изохорном процессах.

Задача. Рабочим телом тепловой машины является 1 моль одноатомного идеального

газа, совершающий циклический процесс, диаграмма которого в координатах теплоемкость – температура показана на рисунке 5.

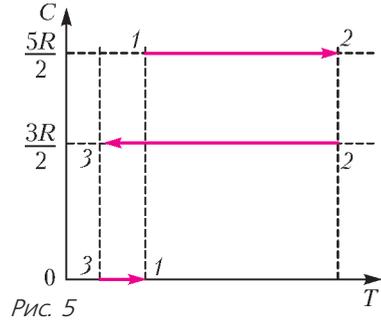


Рис. 5

Известно, что максимальная абсолютная температура газа в цикле больше минимальной в $n = 4\sqrt{2}$ раз. Найдите КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа имеет вид $pV^{5/3} = \text{const}$.

ЗАДАНИЕ 3

Вопрос. Справедлив ли для нити лампы накаливания закон Ома? Ответ объясните.

Задача. При измерении сопротивления вольфрамовой нити лампочки в «холодном» режиме, при температуре около 0°C , оно оказалось равным $R_0 = 34 \text{ Ом}$. В «рабочем» режиме лампочку подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 19 \text{ Ом}$, и при этом она потребляет мощность $P = 25 \text{ Вт}$. Найдите температуру нити лампочки в «рабочем» режиме. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha \approx 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, изменением отношения длины нити к площади ее сечения, вследствие теплового расширения вольфрама, можно пренебречь.

ЗАДАНИЕ 4

Вопрос. При каких условиях линзу можно считать тонкой?

Задача. В тонкой непрозрачной ширме есть круглое отверстие, в которое плотно вставлена тонкая линза (радиус линзы совпадает с радиусом отверстия). По одну сторону от линзы на расстоянии $L = 40 \text{ см}$ от нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости линзы. По другую сторону от линзы на ее оптической оси располагают точечный источник света – таким образом, чтобы на экране наблюдалось его четкое изображение. Когда к этой линзе плотно

прижали вторую тонкую линзу, радиус которой чуть больше радиуса первой, на экране образовалось светлое пятно с радиусом в $n = 2$ раза меньше радиуса отверстия в ширме. Найдите оптическую силу второй линзы. Известно, что вторая линза – собирающая.

Вариант 2

ЗАДАНИЕ 1

Вопрос. Два отрезка лески изготовлены из одного материала. При этом диаметр первой лески в два раза меньше, чем у второй, а длина – в два раза больше. Под весом прикрепленного к концу лески груза первая леска растянулась на 4 мм (что значительно меньше ее длины). Какой будет величина деформации второй лески, если на ней подвесить тот же груз?

Задача. Небольшой груз массой m лежит неподвижно на горизонтальной платформе,

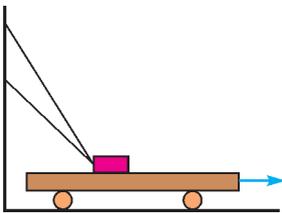


Рис. 6

которую вытягивают из-под него (рис. 6). Груз удерживают на месте два отрезка одной легкой нерастяжимой нити. Найдите силы натяжения обоих отрезков. Вторые

концы отрезков нити закреплены на стене таким образом, что при нахождении груза на платформе они натягиваются одновременно, составляя при этом с горизонталью углы 60° и 45° . Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0,5$. Ускорение свободного падения равно g .

ЗАДАНИЕ 2

Вопрос. При каких условиях для некоторого газа можно использовать уравнение Менделеева – Клапейрона?

Задача. В вертикальном гладком цилиндре с площадью сечения $S = 4 \text{ см}^2$ под поршнем массой $m = 800 \text{ г}$ находится газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1,5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы. При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1,2$ раза. Определите силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное дав-

ление $p_0 \approx 100 \text{ кПа}$, ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

ЗАДАНИЕ 3

Вопрос. Как вычисляется мощность, потребляемая нелинейным элементом цепи постоянного тока (т.е. элементом, для которого не выполняется закон Ома)?

Задача. В схеме, показанной на рисунке 7, оба источника одинаковые. Лампа явля-

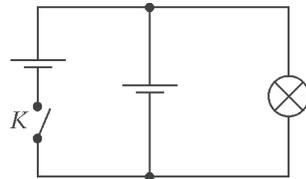


Рис. 7

ется нелинейным элементом: ее вольт-амперная характеристика (связь протекающего тока с напряжением) описывается выражением $I(U) = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon U}{3}}$, где r – внутреннее сопротивление, а ε – величина ЭДС каждого источника. Пока ключ K разомкнут, лампа потребляет мощность $P_1 = 6 \text{ Вт}$. Какой станет потребляемая лампой мощность после замыкания ключа?

ЗАДАНИЕ 4

Вопрос. Луч света падает на тонкую собирающую линзу под углом $0,1 \text{ рад}$ к главной оптической оси в точке, находящейся на расстоянии $x = 0,05F$ от этой оси (F – фокусное расстояние). Под каким углом к оси пойдет преломленный луч?

Задача. В отверстие радиусом $R = 2 \text{ см}$ в тонкой непрозрачной перегородке вставлена собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы. По другую сторону относительно перегородки находится экран. Экран, вначале соприкасающийся с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается и на расстоянии $L = 18 \text{ см}$ от перегородки достигает значения $r = 3 \text{ см}$. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r' = 4 \text{ см}$. Определите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовил К.Парфенов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №7)

1. Можно подбросить мяч вверх и поймать.
2. 100%.

Три точки всегда находятся в одной плоскости.

3. 7 копеек.

Мише не хватало всего одной копейки, и после добавления Машиных денег на букварь по-прежнему не хватает. Значит, у Маши денег меньше одной копейки, т.е. их нет совсем. При этом сказано, что ей не хватает 7 копеек, значит, как раз столько стоит букварь.

4. Приведем один из возможных примеров.

Пусть квадраты из условия задачи имеют сторону длины 3. Соберем многогранник из трех призм. Первый и третий «слой» будут одинаковыми – это будут призмы с высотой 1 и основанием M , второй «слой» – призма с высотой 1 и основанием N (рис.1).

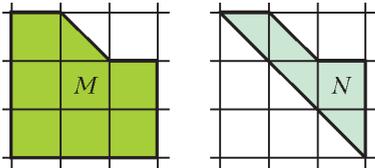


Рис. 1

Тогда сбоку многогранник (рис.2) будет выглядеть, как многоугольник M .

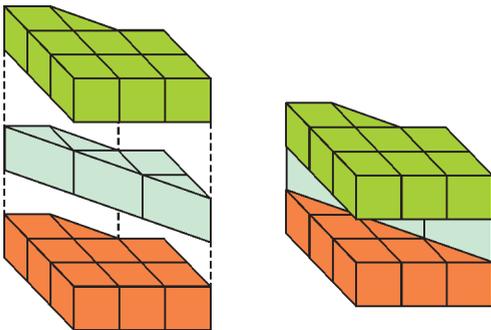


Рис. 2

XXIII ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ ИМЕНИ А.П. САВИНА

1. Через 2 часа.

Первый способ (арифметический). Из условия задачи следует, что обгон произошел, когда лодке осталось проплыть $\frac{2}{5}$ расстояния от B до A . Между двумя встречами с катером она также

прошла $\frac{2}{5}$ этого расстояния. За то же самое время катер дополнительно прошел по $\frac{1}{5}$ расстояния AB туда и обратно. Значит, между своим прибытием в A и прибытием туда лодки он смог бы проплыть такое же расстояние туда и обратно. На это ему нужно $10 : 5 = 2$ часа, следовательно, лодка приплывет в A через 2 часа после катера.

Второй способ (алгебраический). Разобьем отрезок между A и B на пять равных участков (рис. 3). Тогда первый раз катер и лодка встре-



Рис. 3

тились в точке F , а второй раз – в точке D . Обозначим через x (ч) время, за которое катер проходит один участок против течения, а через y (ч) и z (ч) – время, за которое проходят один участок по течению катер и лодка соответственно. По условию: $5(x + y) = 10$, откуда $x + y = 2$. Путь между точками F и D катер прошел за $x + 3y$ (ч), а лодка – за $2z$ (ч), поэтому $x + 3y = 2z$. Чтобы доплыть от D до A , катеру потребуется $2y$ (ч), а лодке – $2z$ (ч). Следовательно, лодка приплывет в A после катера через $2z - 2y = (x + 3y) - 2y = x + y = 2$ (ч).

Третий способ (геометрический). Построим график движения катера и лодки, приняв за начало отсчета старт катера из пункта A и введя необходимые обозначения точек (рис. 4).

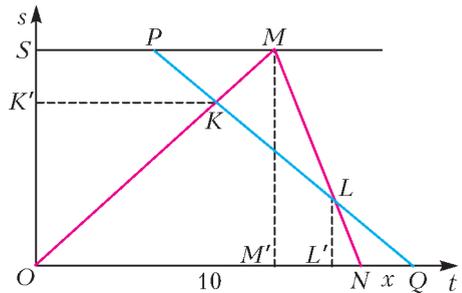


Рис. 4

Пусть $NQ = x$ (ч) – искомое время, тогда, учитывая, что катер догнал лодку через $\frac{3}{5}$ времени, затраченного им на путь из B в A , из подобия треугольников LNQ и LMP и теоремы о пропорциональных отрезках получим

$$\frac{x}{MP} = \frac{LN}{LM} = \frac{L'N}{L'M'} = \frac{2}{3}.$$

Учитывая, что катер и лодка встретились, когда

ктер прошел $\frac{3}{5}$ пути до B , из подобия треугольников KPM и KQO и теоремы о пропорциональных отрезках получим

$$\frac{MP}{OQ} = \frac{KP}{KQ} = \frac{K'S}{K'O} = \frac{1}{4}.$$

Перемножая полученные равенства и учитывая, что $ON = 10$, получим $\frac{x}{10+x} = \frac{1}{6}$, откуда $x = 2$.

Такое же уравнение можно получить, если вместо двух подобий применить теорему Менелая для треугольника OMN и прямой KQ .

2. 25973641.

Сначала выясним, какое наибольшее количество цифр может быть в числе. Очевидно, в нем не может быть нуля. Также в нем не могут одновременно присутствовать цифры 2 и 8, так как хотя бы одна из них будет не первой, но простые двузначные числа и точные квадраты не оканчиваются на 2 или 8. Из этого также следует, что если хотя бы одна из этих цифр присутствует, то она стоит на первом месте. Если при этом в числе есть цифра 5, то двузначное число, оканчивающееся на нее, не может быть простым, поэтому должно быть квадратом. Но такой квадрат только один – это 25. Следовательно, количество цифр в числе будет наибольшим, если в нем нет цифры 8 и оно начинается на 25.

Осталось добавить справа все остальные цифры. Будем каждым шагом приписывать к текущему числу наибольшую из оставшихся цифр так, чтобы не нарушались условия задачи. В итоге получим число 25973641. Все условия для него выполнены: 59, 97, 73 и 41 – простые числа, а 36 и 64 – точные квадраты.

3. Не могут.

Покрасим таблицу в четыре цвета 1, 2, 3, 4 так, как показано на рисунке 5. Рассмотрим один

	1	2	1	2	1
	3	4	3	4	3
	1	2	1	2	1
	3	4	3	4	3
	1	2	1	2	1

Рис. 5

какой-то цвет. Докажем, что если до прыжка хотя бы одна клетка этого цвета была занята кузнечиком, то так будет и после прыжка.

Действительно, предположим, что последний из кузнечиков, сидящих в клетке этого цвета, прыгает через кузнечика, сидящего в клетке другого цвета, и приземляется также в клетке другого цвета. Это означает, что на какой-то горизонтали, вертикали или диагонали стоят подряд две клетки одного цвета, но это не так.

Заметим теперь, что при любом расположении в виде буквы «F» кузнечики занимают клетки всех четырех цветов, значит, после любого количества их прыжков должны также быть заняты клетки четырех цветов. Но расположить «крест» так, чтобы были заняты клетки четырех цветов, невозможно.

4. При всех нечетных $n > 2$.

Для нечетного n раскрасим точки в два цвета так, чтобы цвета чередовались. Тогда и кролик, и волки, делая любой ход, меняют цвет точки, на которой находятся. Следовательно, волки ходят в точки, цвета которых отличны от цвета точки, занимаемой кроликом, поэтому поймать его они не смогут. Так как у кролика всегда есть на выбор три хода, то он может ходить так, чтобы не попасться.

Докажем, что для четного n волки смогут поймать кролика. Проведем через отмеченные точки диаметры окружности и пронумеруем их по часовой стрелке числами от 1 до n . Обозначим кролика буквой K , а волков – B_1 и B_2 . Пусть K в начальный момент находится на диаметре 1, B_1 и B_2 – на диаметрах 2 и n соответственно. B_1 может делать каждый ход против часовой стрелки, а B_2 – всегда повторять ход K (т.е. ходить либо по часовой стрелке, либо по диаметру, как сделал перед этим K). После первого хода K и B_1 будут на диаметре 1, а B_2 – на диаметре n . После каждой следующей серии ходов K и B_1 будут находиться либо на диаметрах одной четности и с одной стороны от диаметра 1, либо на диаметрах разной четности и с разных сторон от диаметра 1. При этом номер диаметра, на котором находится B_1 , каждый раз будет уменьшаться, а K не сможет никогда сделать ход против часовой стрелки, поэтому номер диаметра, на котором он находится, уменьшаться не будет. Значит, в какой-то момент они окажутся на одном диаметре. Если это произойдет после хода B_1 , то K и B_1 окажутся в одной точке. Если же это произойдет после хода K , то K и B_1 будут в противоположных точках, и B_1 сможет поймать K следующим ходом.

5. Рассмотрим любого участника. Если бы он читал доклады не более четырех дней, то из них можно было бы составить не больше $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ пар. Однако есть еще семь участников того же

пола, каждому из которых должна соответствовать одна такая пара. Значит, каждый участник читал доклады не менее пяти дней, и из них можно составить не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ пар.

Выпишем все пары дней, в которые читали доклады все участники конференции. Их будет не меньше $10 \cdot 16 = 160$. Предположим, что конференция длилась не более тринадцати дней. Тогда всего пар дней было не больше $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ и хотя бы три пары из выписанных ста шестидесяти совпадают, что противоречит условию.

6. Можно.

У нас есть 24 пары противоположных граней. Пронумеруем их числами от 0 до 23, и на гранях k -й пары запишем числа 0 и 2^k . Так как $2^{24} > 10000000$, то любая требуемая сумма однозначно представляется в виде суммы различных степеней двойки. Отметим на кубиках грани с нужными степенями, а для остальных степеней отметим противоположные грани. Тогда в каждом кубике будут отмечены ровно три грани с общей вершиной. Поместим его в большой куб отмеченными гранями наружу.

7. При $n \geq 10$.

При четных $n \leq 8$ четность количества покрашенных клеток в центральном квадрате 2×2 не изменяется, т.е. сделать квадрат белым получится не всегда.

При нечетных $n \leq 9$ не изменяется четность количества покрашенных клеток во всем квадрате кроме среднего столбца и средней строки.

В случае $n \geq 10$ можно перекрасить любую доминошку, т.е. прямоугольник из двух клеток (это будет доказано ниже). Чтобы перекрасить одну любую клетку, достаточно перекрасить пятиклеточную полоску, начинающуюся в этой клетке, а затем перекрасить обратно 4 остальные клетки полоски, разбив их на две доминошки. Умея перекрашивать любую клетку, несложно сделать весь квадрат белым.

Покажем теперь, как перекрасить доминошку. Основной алгоритм такой: перекрасить семиклеточную полоску, крайние две клетки которой покрывает данная доминошка, а затем перекрасить обратно остальные 5 клеток пятиклеточной полоски. Этот способ применим всегда, когда существует подходящая семиклеточная полоска. Среди всех доминошек в квадратах $n \times n$ при $n \geq 10$ ее не существует только при $n = 10$ для доминошек, пересекающих средние линии квадрата.

Но все доминошки, пересекающие среднюю линию квадрата 10×10 , можно перекрасить по одной клетке. Рассмотрим, например, горизон-

тальную доминошку, пересекающую вертикальную среднюю линию квадрата. Чтобы перекрасить ее левую клетку, достаточно в этой строке перекрасить пятиклеточную полоску, начинающуюся с левого края, а затем перекрасить обратно лишние 4 клетки, используя перекрашивание вертикальных доминошек, которые их содержат (они не пересекают средние линии). Правая клетка рассматриваемой доминошки перекрашивается симметрично.

8. 2.

Первый способ. Докажем, что, независимо от расположения детей, сумма чисел, названных всеми, должна иметь тот же остаток от деления на 4, что и число $2N$, где N – количество стоящих детей.

Действительно, пусть по кругу стоят только N девочек, тогда каждая из них даст ответ «2», т.е. эта сумма равна $2N$. Если какую-то из девочек заменить на мальчика, то сумма ответов уменьшится на 4 (мальчик скажет «0», а его соседки – «1»). Если после этого заменить на мальчика одну из его соседок, то сумма ответов не изменится. Так как любую расстановку мальчиков и девочек можно получить либо этими операциями, либо им симметричными (аналогичные замены мальчиков на девочек дают такие же результаты), то остаток от деления на 4 у искомой суммы не изменится.

В данном случае $2N = 50$ дает остаток 2 при делении на 4. Сумма ответов, указанных в условии, равна $8 \times 2 + 8 \times 1 = 24$, следовательно, 25-й ребенок может ответить только «2». Один из примеров соответствующей расстановки показан на рисунке 6.

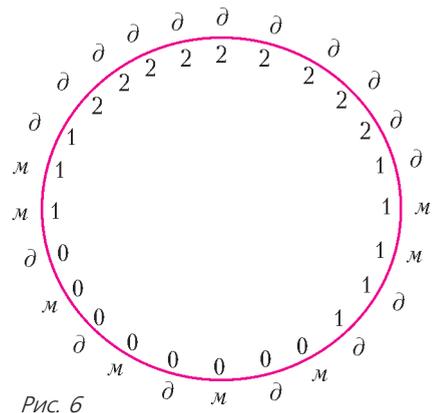


Рис. 6

Второй способ. Если бы у каждого из тех же детей спросили: «Сколько у тебя соседей противоположного пола?», то дети, сказавшие «0» и «2», поменялись бы ролями, а сказавшие «1» повторили бы тот же ответ. Таким образом,

количество ответов каждого вида не изменилось бы, а сумма ответов всех детей была бы равна удвоенному количеству «смен пола» при обходе круга. Количество «смен пола» чётно, поэтому сумма ответов должна делиться на 4. Значит, 25-й ребенок сказал бы «0».

Это соответствует его ответу «2» на вопрос «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?».

9. Петя.

После первого хода Васи 2 и 1 окажутся на позициях разной четности. Покрасим цифры, которые в итоге окажутся на позициях той же четности, что и 1, первым цветом, а остальные – вторым. Петя сможет записать 3 на позицию первого цвета. Вася будет вынужден записать 4 на позицию второго цвета. Петя тоже сможет записать 5 на позицию второго цвета. Затем Вася будет вынужден записать 6 на позицию первого цвета, и Петя сможет записать 7 на позицию первого цвета. Наконец, Вася будет вынужден записать 8 на позицию второго цвета, и Петя сможет записать 9 на позицию второго цвета. В итоге сумма цифр на нечетных позициях (второго цвета) будет равна $8 + 4 + 2 + 5 + 9 = 28$, а на четных (первого цвета): $6 + 3 + 1 + 7 = 17$. Так как $28 - 17 = 11$, число кратно 11 (по признаку делимости).

10. Можно.

Проведем ломаную ABC так, как показано на рисунке 7. Для того чтобы выполнялось условие

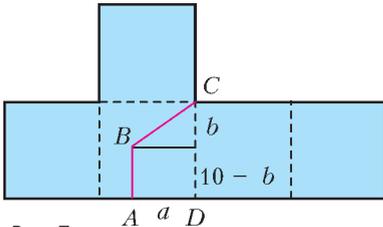


Рис. 7

задачи, необходимо, чтобы площадь трапеции $ABCD$ была равна 50, т.е. $\frac{10 + (10 - b)}{2} \cdot a = 50$, откуда $a = \frac{100}{20 - b}$.

Длина забора равна $10 - b + \sqrt{a^2 + b^2}$ и должна быть меньше 14. Следовательно, $\sqrt{a^2 + b^2} < 4 + b$, т.е. $a^2 < 16 + 8b$. Подставляя найденное значение a и избавившись от знаменателя, получим неравенство $(20 - b)^2(2 + b) > 1250$. Ему удовлетворяет, например, $b = 5$.

11. 4.

Оценка. Заметим, что если из двух треугольников можно сложить треугольник, то они имеют два смежных угла, поэтому наибольший из этих

углов $\phi \geq 90^\circ$. При этом в треугольнике, которому не принадлежит данный угол, все углы не больше ϕ , а если $\phi > 90^\circ$, то все углы строго меньше ϕ .

Предположим, что существуют 5 треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, удовлетворяющих условиям задачи. Возьмем в каждом треугольнике его наибольший угол, пусть $\phi_1 > \phi_2$ – два наибольших из них (среди треугольников есть хотя бы один не прямоугольный, т.е. $\phi > 90^\circ$, поэтому неравенство строгое). Без ограничения общности можно считать, что они принадлежат треугольникам Δ_1 и Δ_2 соответственно. Тогда в каждом из треугольников $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ есть угол, равный $180^\circ - \phi_1$, а в каждом из треугольников $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ есть угол, равный $180^\circ - \phi_2$. Следовательно, треугольники $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ подобны, что возможно только в случае, если они прямоугольные (иначе ни из каких двух из них нельзя было бы сложить треугольник). При этом каждые два из них должны иметь по равному катету. Но в таком случае какие-то два из них равны, что противоречит условию.

Пример. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C . Проведем в нем биссектрису AD и обозначим $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$. Если взять сторону AC очень маленькой, то $AC < BD$. Если $AC > BC$, то $AC > BD$. Значит, из соображений непрерывности, при изменении длины стороны AC есть момент, когда $AC = BD$. Рассмотрим именно такую ситуацию (рис. 8). В качестве

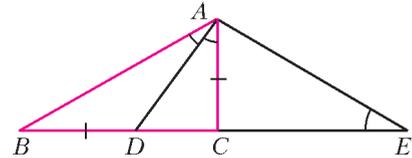


Рис. 8

двух вырезанных треугольников можно взять ABD и ACD . Построим треугольник ECA , подобный ACD , в котором AC – катет, противолежащий углу α . Тогда из треугольников ACD и ECA треугольник уже сложен. Из треугольников ABD и ECA также легко сложить треугольник – достаточно склеить стороны BD и CA , совместив углы D и A .

Осталось к полученному набору треугольников добавить еще один, в котором один из углов равен $180^\circ - \alpha$, а прилежащие к нему стороны равны, например, AD и EC . Полученные четыре треугольника удовлетворяют всем условиям задачи (при этом $AB = EC$, поэтому последний треугольник можно склеить с треугольником ABD даже двумя способами).

12. Можно.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметим точку D так, что $\angle ABD = 20^\circ$, а на отрезке BD – точку E так, что $\angle EAD = 40^\circ$ (рис. 9). Тогда треугольники AEB и ADE –

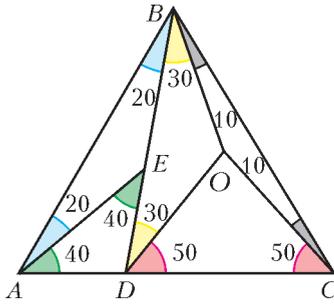


Рис. 9

равнобедренные с углами при основаниях 20° и 40° соответственно.

В треугольнике BDC отметим центр O его описанной окружности. Углы этого треугольника: 40° , 80° и 60° , он остроугольный, поэтому O лежит внутри треугольника. Вычислив центральные углы, получим, что треугольники COD , DOB и BOC равнобедренные с углами при основаниях 50° , 30° и 10° соответственно.

13. Существует.

Пусть ABC – равносторонний треугольник, A' , B' и C' – середины сторон BC , CA и AB соответственно. Построим на сторонах треугольника как на диаметрах полуокруги во внутреннюю сторону (рис. 10). Их объединение ограни-

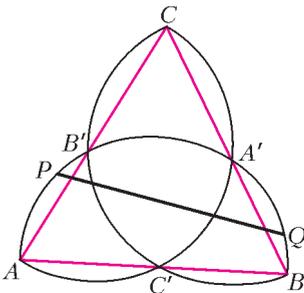


Рис. 10

чено шестью равными дугами окружностей. Пусть P и Q – две точки, делящие периметр этой фигуры пополам. Можно считать, что P лежит на дуге AB' , тогда Q лежит на дуге $A'B$, причем дуги AP и $A'Q$ равны. Так как дуги AB' и $A'B$ принадлежат одной окружности с центром C' , то угол $PC'Q$ равен 120° и это не зависит от выбора точки P . Следовательно, длина на PQ постоянна.

14. Пусть M – середина AB , тогда утверждение задачи равносильно тому, что длина медианы

KM треугольника AKB больше половины стороны AB (рис. 11).

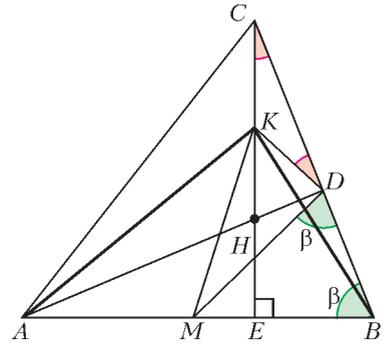


Рис. 11

Пусть AD – одна из высот треугольника ABC , тогда треугольник ADB прямоугольный. Следовательно, его медиана DM равна половине AB , т.е. $MD = MB$. Тогда $\angle MDB = \angle MBD = \beta$.

Рассмотрим высоту CE треугольника ABC . Из прямоугольного треугольника CBE получим, что $\angle BCE = 90^\circ - \beta$. Кроме того, DK – медиана прямоугольного треугольника CDH , значит, $\angle KDC = \angle BCE = 90^\circ - \beta$. Таким образом, $\angle KDM = 90^\circ$, поэтому $KM > DM = \frac{1}{2} AB$, что и требовалось.

Отметим, что утверждение задачи справедливо и для тупоугольного треугольника, а рассмотренный отрезок KM является диаметром окружности девяти точек треугольника ABC .

15. Утверждение задачи равносильно тому, что H – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC с продолжением стороны AC (рис. 12). Значит, достаточно доказать, что центр этой окружности лежит на прямой DH .

Пусть биссектриса угла BAC пересекает прямую DH в точке M . Так как $AE = AC$, то $AM \perp DE$.

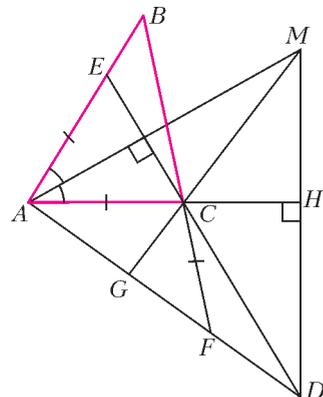


Рис. 12

Пусть прямая MC пересекает AD в точке G . Так как C – точка пересечения двух высот треугольника AMD , то MG – его третья высота. Из равенства $CA = CF$ следует, что CG – биссектриса треугольника ACF . Тогда CM – биссектриса внешнего угла BCH треугольника ABC . Таким образом, M – центр вневписанной окружности треугольника ABC , что и требовалось.

**МЕТОД КООРДИНАТ: РЕШЕНИЯ
БЕЗ ЛИШНИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

1. Выделив полные квадраты по каждой из переменных x и y , получим уравнение

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a},$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2},$$

которое задает окружность тогда и только тогда, когда $b^2 + c^2 - 4ad > 0$.

2. Расстояние от точки (x, y) до точки $(1; 1)$ равно $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, а расстояние до прямой $y = -1$ равно $|y + 1|$. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{(x-1)^2}{4}.$$

3. Ясно, что если $l(x, y) = \alpha_1 l_1(x, y) - \alpha_2 l_2(x, y)$, то уравнение $l(x, y) = 0$ задает прямую, проходящую через точку P . Таким образом, надо доказать обратное утверждение. Предположим, что уравнение $l(x, y) = 0$ задает прямую, проходящую через точку P . Рассмотрим точку $Q(x_0, y_0)$, отличную от точки P и лежащую на этой прямой. Уравнение

$$l_2(x_0, y_0)l_1(x, y) - l_1(x_0, y_0)l_2(x, y) = 0$$

задает прямую, проходящую как через точку P , так и через точку Q . Следовательно, оно задает ту же самую прямую, что и уравнение $l(x, y) = 0$. Поскольку коэффициенты в уравнении прямой определены с точностью до множителя, то существует число k такое, что

$$l(x, y) = kl_2(x_0, y_0)l_1(x, y) - kl_1(x_0, y_0)l_2(x, y).$$

4. Для любой точки $M(x; y)$ плоскости значение выражения

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = d_i^2 - r_i^2$$

и есть степень точки относительно окружности, заданной уравнением $f_i(x, y) = 0$.

5. Формулировка обобщения упражнения 5: Рассмотрим три окружности. Предположим, что

среди радикальных осей пар этих окружностей нет параллельных прямых. Тогда все эти три радикальные оси проходят через одну точку (называемую *радикальным центром* трех данных окружностей).

Доказательство этого утверждения точь в точь совпадает с решением задачи 3.

6. Указание. Воспользуйтесь предыдущим упражнением.

7. Если за оси координат взять биссектрисы данных углов, то эти углы лежат на кривых, заданных уравнениями $(x - a)^2 = k_1 y^2$ и $x^2 = k_2 (y - b)^2$, или

$$x^2 - k_1 y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

и

$$x^2 - k_2 y^2 + 2k_2 by - k_2 b^2 = 0.$$

Умножив первое уравнение на $1 + k_2$, второе на $-(1 + k_1)$ и сложив результаты, мы получим уравнение второго порядка, сумма старших членов которого имеет вид $(k_2 - k_1)(x^2 + y^2)$. Таким образом мы получим уравнение окружности, проходящей через четыре попарные точки пересечения сторон данных углов.

Конечно, эта задача имеет и геометрическое решение. Найдите его!

8. Указание. Прибавьте к первому уравнению удвоенное второе.

**XXIV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА
«ТУЙМААДА»**

МАТЕМАТИКА

Младшая лига

1. Множество M всех пар (x, y) , в которых x и y принадлежат областям определения функций f и g , содержит 201^2 элементов. Это число нечетно. С другой стороны, если при каждом k рассмотреть множество M_k всех пар (x, y) , для которых $f(x) - g(y) = k$, то M является объединением попарно непересекающихся множеств M_k . Следовательно, хотя бы в одном M_k количество элементов нечетно.

2. Построим отрезок $B_1 D_1$, симметричный отрезку BD относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC (рис.13). Тогда $PD = QD_1$, $PD_1 = QD$, отрезок BD_1 – диаметр окружности, описанной около четырехугольника, и $P_{BQD} = BQ + QD + DP + PB =$

$$= (BQ + QD_1) + (D_1 P + PB) \geq 2BD_1 \geq 2AC.$$

3. Пусть D – какая-нибудь клика, A – максимальная клика, B – максимальная клюка, D_i –

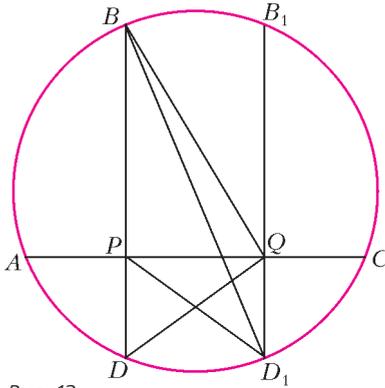


Рис. 13

множество вершин из D , у которых автобусная степень равна i . Обозначим через s число вершин в наибольшем из D_i , тогда $s \leq |B|$. Пусть d_1, d_2, \dots, d_r – список возможных автобусных степеней у вершин из D , тогда $r \leq |A|$, и следовательно,

$$|D| = |D_{d_1}| + |D_{d_2}| + \dots + |D_{d_r}| \leq rs \leq |A| \cdot |B|.$$

4. Пусть $BC = a$, $AC = b > a$ и $AB = c$ – стороны исходного треугольника ABC , $c^2 = a^2 + b^2$. Пусть серединный перпендикуляр к гипотенузе AB пересекает катет AC в точке C' (рис.14). Обозна-

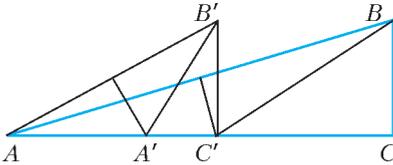


Рис. 14

чим через B' четвертую вершину прямоугольника $BCC'B'$. В прямоугольном треугольнике $AC'B'$ катет AC' длиннее катета $B'C'$, так как $AC' = C'B > BC$. Пусть серединный перпендикуляр к отрезку AB' пересекает отрезок AC' в точке A' . Немного посчитаем. По построению

$$C'B' = a \text{ и } AC' = \frac{1}{2} AB \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{c^2}{2b}.$$

Обозначим $\alpha = \angle B'AC'$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{2ab}{c^2}$. Далее,

$$\operatorname{tg} \angle B'A'C' = \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{2ab}{c^2}}{1 - \left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2} = \frac{4abc^2}{(b^2 - a^2)^2}.$$

Величина $\cos 2\alpha$ тоже выражается рационально через $\operatorname{tg} \alpha$, поэтому стороны прямоугольного треугольника $A'B'C'$ рациональны.

Более того,

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} A'C' \cdot C'B' = \frac{B'C'^2}{2 \operatorname{tg} \angle B'A'C'} = S \frac{(b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Таким образом, треугольник, подобный треугольнику $A'B'C'$ с коэффициентом подобия $\frac{2bc}{b^2 - a^2}$, имеет рациональные стороны и площадь S . Этот треугольник не равен исходному, поскольку уравнение

$$\operatorname{tg} \angle B'A'C' = \frac{b}{a}, \text{ т.е. } t = \frac{4t(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)^2}, \text{ где } t = \frac{b}{a},$$

не имеет положительных рациональных корней.

5. Проведем $LF \parallel BD$ (рис.15). Достаточно доказать равенство треугольников FLE и CDL .

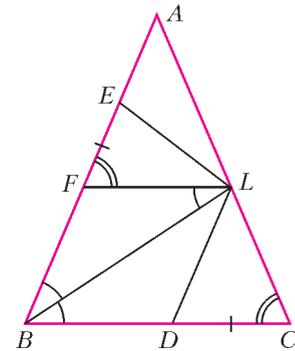


Рис. 15

Имеем

$$\angle AFL = \angle ABC = \angle ACB,$$

$$EF = AF - AE = AL - AE = AE = CD.$$

Так как $\angle FLB = \angle LBC$, то треугольник BFL – равнобедренный, откуда $FL = FB = LC$.

6. У числа 2^r делителями являются степени двойки $1, 2, 2^2, \dots, 2^r$. Пусть d_1, \dots, d_k – делители числа b . Рассмотрим выражение

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^r)(d_1 + \dots + d_k).$$

Раскрывая скобки, мы получим сумму, в которой каждое слагаемое является делителем числа N , причем очевидно, что каждый делитель числа N присутствует в этой сумме ровно один раз. Таким образом,

$$\sigma(N) = (2^{r+1} - 1)\sigma(b),$$

и мы знаем по условию, что

$$\sigma(N) = 2N - 1 = 2^{r+1}b - 1.$$

Итак,

$$(2^{r+1} - 1)\sigma(b) = 2^{r+1}b - 1.$$

Из этого равенства видно, что числа b и $\sigma(b)$ не могут иметь общих делителей.

7. 39.

Прямая, проходящая параллельно стороне большого треугольника на расстоянии $0,1$, пересекает 39 треугольничков, примыкающих к этой стороне.

Докажем, что больше 39 треугольничков пересечь невозможно. Пусть прямая l пересекает стороны AB и AC большого треугольника на расстояниях x и $y \leq x$ от вершины A соответственно (рис.16). Если $\lceil x \rceil = m$, можно ограни-

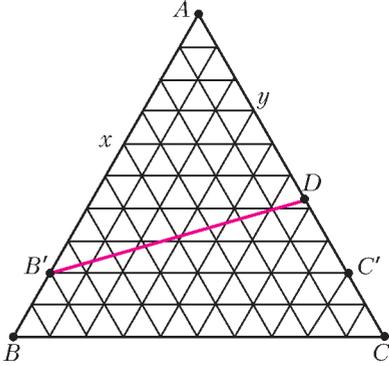


Рис. 16

читься рассмотрением треугольника $AB'C'$ со стороной m , разбитого на m^2 единичных треугольничков (здесь B' и C' – точки, лежащие на расстоянии m от вершины A на сторонах AB и AC соответственно).

Пусть прямая l пересекает AC' в точке D , а внутри отрезков AD и $C'D$ содержится r и s вершин треугольничков соответственно. Тогда $r + s \leq m - 1$. Прямая l пересекает $m - 1$ границ треугольничков, параллельных AC , r границ, параллельных AB , и s границ, параллельных BC . Поэтому общее количество пересечений прямой l с границами треугольничков равно $r + s + m - 1 \leq 2m - 2$, следовательно, количество треугольничков, которые пересекает l , не больше $2m - 1 \leq 39$.

8. Да.

В предлагаемом алгоритме первая пара полицейских гонит вора по часовой стрелке, а вторая пара – против часовой стрелки.

Скажем, что вершины A_i образуют в нашем графе слой A , а вершины B_i – слой B . Если полицейский C_1 (или вор R) находится в вершине A_i или B_i , скажем, что его координата $x_1 = i$ (соответственно, $x_R = i$). В любой момент мы можем для удобства уменьшить или увеличить любую из координат полицейских на 2017. Мы будем, однако, аккуратно следить за

изменением координаты вора при его движении, так что возможно, что через какое-то время вор окажется в вершине A_i , но мы будем считать, что, скажем, $x_R = i + 2017$, поскольку вор сделал полный оборот.

Стратегия полицейских C_1 и C_2 состоит из двух частей.

Часть I. Полицейский C_2 просто стоит в некоторой вершине слоя A . Полицейский C_1 движется по слою A по часовой стрелке. Его цель – добиться, чтобы его координата x_1 была сравнима по модулю 17 с координатой вора x_R . Рассмотрим остаток от деления разности $x_R - x_1$ на 17. Если вор ходит по ребрам слоя B , по ребру $A_i B_i$ или просто стоит на месте, остаток не меняется, а полицейский C_1 на следующем ходу сможет уменьшить остаток на 1. Если вор ходит по ребру $A_i A_{i+1}$, после следующего хода C_1 остаток не изменится, но бесконечно это продолжаться не может из-за полицейского C_2 . Наконец, если вор идет по ребру $A_{i+1} A_i$, полицейский C_1 стоит на месте.

Таким образом, после нескольких ходов будет выполнено условие $x_1 \equiv x_R \pmod{17}$. Более того, следующим ходом полицейский C_1 может сделать так, чтобы сохранилось условие $x_1 \equiv x_R \pmod{17}$ и он оказался в одном слое с вором.

Часть II. Выберем x_1 так, что $x_1 \equiv x_R \pmod{17}$ и $x_1 < x_R$. Пусть при этом $x_R - x_1 = 17k$. Теперь полицейский C_1 должен сохранять сравнение $x_1 \equiv x_R \pmod{17}$ и оставаться в одном слое с вором. Он должен также стараться уменьшить разность $x_R - x_1$. Для этого он будет просто «копировать» ходы вора: если вор ходит по слою A , полицейский C_1 делает такой же ход в слое A ; если вор остается в своей вершине или ходит из слоя в слой, C_1 делает то же самое; если вор ходит по слою B по часовой стрелке, C_1 делает такой же ход в слое B . Но если вор ходит по слою B против часовой стрелки (назовем такой ход *критическим*), C_1 остается на месте, и в этот момент разность $x_R - x_1$ уменьшается на 17. Ясно, что в этой части игры вор может сделать не более k критических ходов.

Что касается полицейского C_2 , то в начале мы выбираем (прибавлением кратного 2017) значение $x_2 < x_R$, и C_2 просто движется вдоль слоя A по часовой стрелке.

Докажем, что координата x_R будет расти неограниченно. Действительно, она не увеличивается только в трех случаях:

1) вор переходит из слоя в слой или остается на месте (тогда разность $x_R - x_2$ уменьшается в результате следующего хода C_2),

2) вор ходит по слою A против часовой стрелки (тогда уменьшается разность $x_R - x_2$),
 3) вор делает критический ход; тогда он перепрыгивает через C_2 , и можно считать, что значение x_2 меняется на $x_2 - 2017$, отчего разность $x_R - x_2$ возрастает почти на 2000.
 Поскольку третье может произойти не более k раз, x_R станет сколь угодно велико.
 С другой стороны, если два других полицейских будут применять аналогичную стратегию в противоположном направлении, x_R будет неограниченно уменьшаться.
 Полученное противоречие означает, что когда-нибудь вор будет пойман.

Старшая лига

5. Легко видеть, что любой многочлен вида

$$f(x) = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} - x + A \left(x - \frac{1}{2017} \right) \left(x - \frac{1}{2018} \right)$$

принимает требуемые значения при $x = \frac{1}{2017}$ и $x = \frac{1}{2018}$. При $A = 2017 \cdot 2018$ два его коэффициента целые.

7. Пусть прямые CH и AF пересекаются в точке L , тогда $\angle ALH = 90^\circ$ (рис.17). Поскольку

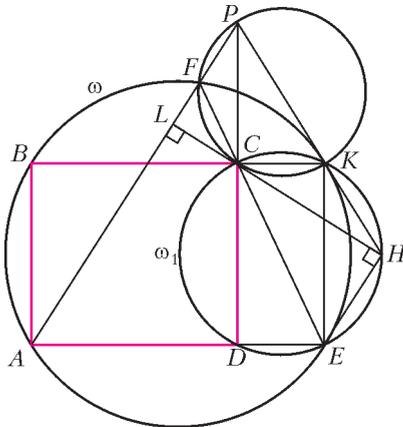


Рис. 17

$\angle CDE = \angle CHE = 90^\circ$, точки C, H, E, K лежат на одной окружности, обозначим ее ω_1 . Пусть K – четвертая вершина прямоугольника $EDCK$, очевидно, точка K лежит на обеих окружностях ω и ω_1 .
 Заметим, что

$$\angle FKB = \angle BAF = \angle FPC$$

(в первом равенстве углы опираются на общую дугу окружности ω , второе следует из параллельности). Значит, четырехугольник $FPKC$ впи-

санный. Тогда

$$\begin{aligned} \angle FPK &= 180^\circ - \angle FCK = \angle ECK = \\ &= 90^\circ - \angle CEK = 90^\circ - \angle CHK. \end{aligned}$$

Перепишем полученное равенство в виде $\angle LPK = 90^\circ - \angle LHK$. Оно означает, что четырехугольник $LPKH$ на самом деле является прямоугольным треугольником, в котором точки P, K, H лежат на одной прямой. Осталось проверить, что прямая PH касается окружности ω в точке K . Это следует, например, из равенства углов:

$$\angle FKP = \angle FCP = \angle FEK.$$

8. Круг с диаметром AB , кроме его центра.

Круг с диаметром AB является объединением всех прямоугольников с диагональю AB . Очевидно, если стороны прямоугольника с диагональю AB параллельны осям координат, то нелепая середина лежит в таком прямоугольнике (так как координаты нелепой середины заключены между соответствующими координатами точек A и B).

Докажем обратное: если точка C лежит в некотором прямоугольнике с диагональю AB , то она является нелепой серединой точек A и B . Спроецируем точку C на стороны прямоугольника. Нам достаточно рассмотреть случай, когда проекция C на каждую из сторон расположена не дальше от проекции A , чем от проекции B . (В противном случае мы можем отразить систему координат относительно серединного перпендикуляра к стороне; координаты точек A и B поменяются местами, и нелепая середина также отразится относительно серединного перпендикуляра.) Пусть проекции отрезков AB и AC на ось абсцисс равны u и v , $2v \leq u$. Чтобы точка C , отличная от середины отрезка AB , была нелепой серединой A и B , координата x точки A должна удовлетворять уравнению $x(x+u) = (x+v)^2$, т.е. $(u-2v)x = v^2$. Полученное значение x неотрицательно, поэтому такое задание абсциссы возможно при $u \neq 2v$. Аналогично можно задать ординаты.

ФИЗИКА

1. Поскольку трос длинный, сила сопротивления, действующая на одно судно (катер или баржу), не зависит от движения другого судна. Пусть k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности между силой сопротивления и скоростью катера и баржи соответственно, F_0 – сила тяги винта, v – скорость катера с баржой, тогда условия равномерности установившихся движений имеют вид

$$F_0 = k_1 \cdot \alpha v \text{ и } F_0 = k_1 v + k_2 v,$$

откуда получаем соотношение

$$k_2 = (\alpha - 1)k_1.$$

Рассмотрим движение тела массой m , имеющего начальную скорость v_0 , под действием силы сопротивления $\vec{F} = -k\vec{v}$, где \vec{v} – мгновенная скорость тела. Из второго закона Ньютона в проекции на направление вдоль начальной скорости

$$ma = -kv$$

после интегрирования по времени до момента остановки получаем уравнение

$$mv|_{v_0}^0 = -kx|_0^s, \text{ или } m(v_0 - 0) = -k(0 - s),$$

из которого находим путь s , пройденный телом к моменту остановки:

$$s = \frac{mv_0}{k}.$$

Замечание. Предлагаем читателям самостоятельно вывести формулу $q = LI_0/R$ для заряда q , протекшего за все время в контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R , если начальная сила тока в контуре была равна I_0 , и подумать о причинах сходства этой формулы с формулой для s , после чего сравнить свои выводы с описанными в литературе «электромеханическими аналогиями». Пусть m_1 и m_2 – масса катера и баржи соответственно, тогда формула для s , примененная к их движению по инерции, приводит к уравнению

$$\frac{m_1 v}{k_1} \cdot \beta = \frac{m_2 v}{k_2},$$

из которого получаем искомое отношение масс:

$$\frac{m_2}{m_1} = (\alpha - 1)\beta.$$

2. Одинаковое абсолютное увеличение температуры обоих газов означает большее относительное увеличение меньшей температуры T_1 , поэтому давление первого газа вырастет сильнее и капля будет смещаться в сторону второго газа до восстановления равенства давлений.

Пусть p – начальное давление в каждом сосуде, V – объем каждого сосуда, тогда уравнения Менделеева–Клапейрона для каждого газа имеют вид

$$\frac{pV}{T_1} = \text{const}, \quad \frac{pV}{T_2} = \text{const},$$

откуда после логарифмирования и дифференцирования получаем уравнения

$$\frac{\Delta p_0}{p} + \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_1} = 0, \quad \frac{\Delta p_0}{p} - \frac{\Delta V_0}{V} - \frac{\Delta T_0}{T_2} = 0,$$

где ΔV_0 – изменение объема, равное половине

объема трубки и имеющее разные знаки для разных газов, а Δp_0 и ΔT_0 – изменения давления и температуры, при которых капля смещается до конца трубки. Правомерность подстановки указанных конечных приращений вместо бесконечно малых дифференциалов dp , dV и dT следует из условия $\alpha \ll 1$. Из записанных уравнений, с учетом соотношения $\Delta V_0 = \alpha V/2$, получаем выражение

$$\Delta T_0 = \frac{\alpha T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Таким образом, при больших изменениях температуры ($\Delta T > \Delta T_0$) капля стечет во второй сосуд, после чего газы перемешаются. А при малых изменениях температуры ($\Delta T < \Delta T_0$) капля сместится на расстояние Δx , которое в силу условия $\alpha \ll 1$ можно считать линейно зависящим от температуры:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{L(T_2 - T_1)}{2\alpha T_1 T_2} \cdot \Delta T.$$

3. Типичное решение подобных задач включает рассмотрение протекших зарядов и работы источника. Однако есть гораздо более эффективный подход, основанный на упрощении схем с помощью свойств последовательного и параллельного соединений элементов в ситуациях, когда, согласно распространенному ошибочному мнению, это делать якобы нельзя.

Начальное напряжение U_0 на конденсаторе емкостью C_1 сразу после подключения источника и до подключения катушки найдем по свойствам последовательного соединения:

$$U_0 = \frac{1}{C_1} \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon \right) = \frac{C_2 \varepsilon}{C_1 + C_2}.$$

Перерисуем схему после подключения катушки в более наглядном виде (рис.18). Заменим последовательно соединенные источник и конденса-

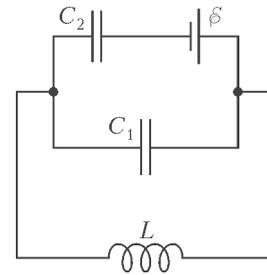


Рис. 18

тор емкостью C_2 на эквивалентный конденсатор емкостью $C_3 = C_2$, напряжение на котором отличается на ε от напряжения на конденсаторе

емкостью C_2 . Далее заменим параллельно соединенные конденсаторы емкостями C_1 и C_3 на эквивалентный конденсатор емкостью $C = C_1 + C_2$ с начальным напряжением U_0 , что превратит схему в обычный LC -контур, период T колебаний в котором находится по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

1) Максимальная сила тока через катушку будет наблюдаться впервые через четверть периода колебаний после максимума напряжения на эквивалентном конденсаторе емкостью C , имевшего место в начальный момент времени:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

2) Запишем закон сохранения энергии при колебаниях:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2},$$

откуда находим максимальную силу тока через катушку:

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{C_2\varepsilon}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

3) Напряжение на конденсаторе емкостью C_2 будет максимальным по модулю, когда напряжение на конденсаторе емкостью C будет максимальным и противоположным по знаку напряжению на источнике, т.е. впервые это произойдет через половину периода колебаний:

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

4) Максимальное напряжение на конденсаторе емкостью C_2 найдем из условия отличия его на ε от напряжения на эквивалентном конденсаторе:

$$U_2 = U_0 + \varepsilon = \varepsilon\left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right).$$

4. Пусть N – число витков провода, φ – угол отклонения карандаша от вертикали, тогда изменение $\Delta\Phi$ внешнего магнитного потока через соленоид по сравнению с потоком в вертикальном положении задается выражением

$$\Delta\Phi = BSN(1 - \cos\varphi).$$

Обозначим через μ_0 магнитную постоянную и через l – длину цилиндрической части карандаша, тогда намотанная на нее проволока образует соленоид, индуктивность L которого равна

$$L = \frac{\mu_0 SN^2}{l}.$$

В сверхпроводящем соленоиде индуцируется ток, который создаст собственный магнитный поток, компенсирующий изменение внешнего магнитного потока. Отсюда находим силу I индукционного тока:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{L} = \frac{Bl(1 - \cos\varphi)}{\mu_0 N}.$$

На виток с током в магнитном поле действует суммарный момент магнитных сил

$$M_1 = -NBIS \sin\varphi = -\frac{B^2Sl(1 - \cos\varphi) \sin\varphi}{\mu_0},$$

где знак «минус» отражает тот факт, что этот момент стремится уменьшить угол φ . На карандаш действует еще момент, создаваемый парой механических сил – реакции опоры и силы тяжести – и равный

$$M_2 = \frac{mgl \sin\varphi}{2}.$$

Замечание. Пара сил – это цельный термин, а не просто какие-то две силы. Две силы называются парой, только если их векторная сумма равна нулю. Момент, создаваемый парой сил, равен произведению модуля одной силы на расстояние между линиями действия сил и не зависит от выбора оси вращения (докажите это самостоятельно). Магнитные силы дают в сумме ноль, а сила тяжести уравновешена реакцией опоры, поэтому при вычислении обоих моментов M_1 и M_2 не было необходимости выбирать ось вращения.

Запишем суммарный момент M сил, действующих на карандаш:

$$M = M_1 + M_2 = \left(\frac{mg}{2} - \frac{B^2S(1 - \cos\varphi)}{\mu_0}\right)l \sin\varphi.$$

Из условия равновесия $M(\varphi_0) = 0$ находим ожидаемое нулевое отклонение в положении неустойчивого равновесия и искомое отклонение φ_0 в положении устойчивого равновесия:

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2S}.$$

Заметим, что при отрицательном значении выражения для $\cos\varphi_0$ карандаш не провалится сквозь опору, а будет устойчиво лежать на ней, поэтому полный ответ на первый вопрос выглядит так:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arccos\left(1 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2S}\right), & \text{если } 2B^2S > \mu_0 mg; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } 2B^2S \leq \mu_0 mg. \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших вычислений введем

обозначение

$$a = \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S}$$

и перепишем полученные ранее формулы с его использованием:

$$\cos \varphi_0 = 1 - a, \quad M = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (a - 1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Лежащий на опоре карандаш колебаться не может, поэтому из факта возможности рассматриваемых колебаний следует условие $a < 1$. Выразим эффективную угловую жесткость $k(\varphi)$ в произвольном положении и найдем ее значение k_0 в положении равновесия:

$$k(\varphi) = -\frac{dM}{d\varphi} = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (1 - (a - 1) \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi),$$

$$k_0 = k(\varphi_0) = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} (2a - a^2) = \frac{mgl}{2} (2 - a).$$

Положительность k_0 означает, что найденное положение равновесия действительно является устойчивым и колебания около него возможны. Тогда момент инерции I карандаша относительно оси, проходящей через его точку опоры перпендикулярно карандашу, дается формулой $I = ml^2/3$, и искомый период крутильных колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g(2 - \frac{\mu_0 mg}{2B^2 S})}}.$$

5. Изобразим на клетчатой бумаге сечение оптической системы плоскостью, проходящей через главную оптическую ось осколка линзы перпендикулярно обоим зеркалам (рис.19). Отметим большими точками основные элементы: общий край зеркал C , источник света S , оптический центр осколка O , его фокусы F_1 и F_2 , а буквами A и B отметим края осколками, расположенные на разных расстояниях от центра: $OA = R > r = OB$.

Чтобы не запутаться при построении изображений, пронумеруем элементы: 1 – первое зеркало, 2 – второе зеркало, 3 – осколок линзы и будем писать в индексе обозначения каждого изображения последовательность номеров элементов, через которые прошли лучи, создавшие данное изображение. А чтобы не построить лишние изображения, следует каждый раз проверять, что оптический элемент находится в области видимости предмета, т.е. что на оптический элемент падает хотя бы один луч от предмета.

Применение обычных правил построения изображений в зеркале и линзе (напомним, что лю-

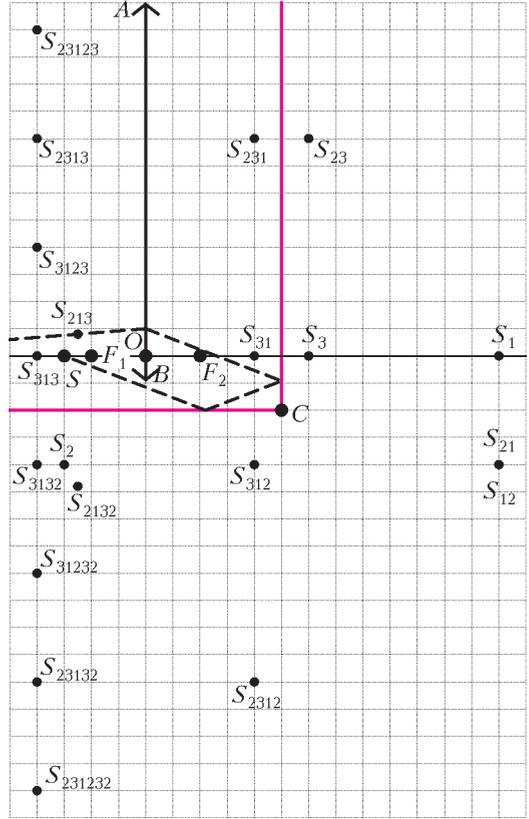


Рис. 19

бая часть линзы создает изображение там же, где и целая линза, но вот области видимости могут различаться) дает 20 изображений, два из которых, S_{12} и S_{21} , совпадают.

Для большей ясности рассмотрим некоторые изображения более подробно. Поскольку зеркала полубесконечные, а линза имеет конечный размер, обязательно найдутся лучи, идущие от источника S к первому зеркалу мимо линзы. После отражения они создадут изображение S_1 , но попасть в линзу ни напрямую, ни после отражения еще и от второго зеркала, создав тем самым изображение S_{12} , они не смогут, в чем легко убедиться, рассмотрев проекции этих лучей на плоскость рисунка, поэтому изображений S_{13} и S_{123} не существует.

Есть ровно два изображения, S_{213} и S_{2132} , которые лежат не точно на пересечениях линий сетки, поэтому их положения нужно вычислить по формулам. Изображенный на рисунке пунктиром луч создает после первого отражения изображение S_2 , после второго – S_{21} , а после преломления – S_{213} . Пусть $F = 2r$ – фокусное расстояние линзы, $d = 13r$ и f – расстояния от плоскости линзы до предмета S_{21} и его изобра-

жения S_{213} соответственно, тогда из формулы тонкой линзы получаем

$$f = \frac{dF}{d-F} = \frac{26}{11}r,$$

а из подобия треугольников, возникающих при проведении луча через оптический центр линзы, находим расстояние l от S_{213} до главной оптической оси:

$$l = \frac{f}{d} \cdot 4r = \frac{8}{11}r.$$

Поскольку $l < r < R$, рассматриваемый луч может идти в сторону второго зеркала, поэтому изображение S_{2132} будет существовать при любых значениях R . Таким образом, расстояния x и y от любого из изображений S_{213} и S_{2132} до плоскостей первого и второго зеркал соответственно имеют вид

$$x = 5r + f = \frac{81}{11}r, \quad y = 2r + l = \frac{30}{11}r.$$

Представленные на рисунке изображения построены в предположении $R \gg r$, а теперь предстоит выяснить, какие из них не будут наблюдаться при меньших значениях R . Для этого нужно для каждого изображения построить создающие его граничные лучи, двигаясь мысленно в направлении к источнику, и найти их точки пересечения с плоскостью линзы. Итогом этих несложных (хотя и многочисленных) построений является таблица 1, из которой следует

Таблица 1

Если ...	то существует ...
$R > 1,5r$	S_{312}
$R > 4,5r$	S_{3123}
$R > 8r$	S_{2313} и S_{23132}
$R > 12r$	S_{31232}
$R > 21,5r$	S_{2312}
$R > 24,5r$	S_{23123}
$R > 44r$	S_{231232}

ответ на второй вопрос, представленный в таблице 2.

Таблица 2

R/r	N
3	13
5	14
10	16
20	17
40	19
80	20

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

Ф И З И К А

Отборочный этап

Часть I

- $F_{\min} = 2F = 2 \cdot 14 \text{ Н} = 28 \text{ Н}.$
- $r = \frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{V_1 + V_2} = 56\%.$
- $f = \frac{F}{3} = 4 \text{ см}.$

Часть II

- $t = 2\sqrt{\frac{n+k+1+\cos\alpha}{n+k+1} \frac{L}{g \sin\alpha}} \approx 2,0 \text{ с}$ (доска движется поступательно по горизонтали, трубы движутся поступательно вдоль наклонной горки и вращаются относительно своих осей, а груз относительно оси большей трубы движется по горизонтали с ускорением).

2. Обозначим точки цикла 1, 2, 3, 4, начиная с левой верхней точки, и будем обходить его по часовой стрелке.

Газ отдает тепло на участках 2-3, 3-4 и K-1 (координаты точки K равны 3,75 л и $2,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$).

Газ получает тепло на участках 1-2 и 4-K. Работа газа равна площади цикла. Поэтому КПД тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} \approx 0,22 = 22\%.$$

3. На каждую грань шкатулки действует сила, перпендикулярная ее поверхности и пропорциональная потоку электрического поля. Этот поток создается положительным зарядом шарика и отрицательными зарядами трех других граней. Для того чтобы шкатулка рассыпалась, разность сил давления воздуха внутри и снаружи должна превысить электрическую силу. Окончательно получаем

$$\Delta p \geq \frac{4|q|(Q-2|q|)}{3\epsilon_0 a^4}.$$

4. После скатывания шайбы по прямолинейному наклонному участку она приобретет скорость, квадрат которой равен

$$v_1^2 = 2gh(1 - \mu \text{ctg } \alpha) - 2gr(1 - \cos \alpha),$$

где r — радиус кривизны участка сопряжения. При прохождении по перегибу удобнее пользоваться углом поворота шайбы от начала сопряжения φ , он изменяется от 0 до α . Запишем уравнения для касательного и нормального уско-

рений шайбы:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N + mg \sin(\alpha - \varphi),$$

$$m \frac{v^2}{r} = N - mg \cos(\alpha - \varphi).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\mu \frac{v^2}{r} + g(\sin(\alpha - \varphi) - \mu \cos(\alpha - \varphi)) = \\ &= \frac{1}{2r} \frac{d(v^2)}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v^2)}{d\varphi} &= -2\mu v^2 + 2gr(\sin(\alpha - \varphi) - \mu \cos(\alpha - \varphi)) \approx \\ &\approx -2\mu v^2, \end{aligned}$$

$$v^2(\varphi) \approx \text{const} \cdot e^{-2\mu\varphi} \approx v_1^2 \cdot e^{-2\mu\varphi}.$$

На горизонтальный участок шайба выезжает со скоростью v_2 , квадрат которой равен

$$v_2^2 = 2gh(1 - \mu \text{ctg} \alpha) \cdot e^{-2\mu\alpha} - cgr,$$

где $c \approx 1$, а длина тормозного пути на горизонтальном участке, где ускорение шайбы равно $a_s = \mu g$, составляет

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = h \left(\frac{1}{\mu} - \text{ctg} \alpha \right) \cdot e^{-2\mu\alpha} - \frac{c}{2\mu} r = kh + b.$$

Если построить график $s(h)$ на основании таблицы 1, то он действительно будет линейным. Подбор значений k и b графическим методом дает $k \approx 0,456 \pm 0,003$ и $b \approx (-0,0112 \pm 0,0008)$ м. Продолжая эту зависимость в область более малых h , найдем, что $s(0,2 \text{ м}) \approx (0,080 \pm 0,007)$ м. Теперь из таблицы 2 можно определить угол, при котором получены данные таблицы 1:

$$\alpha \approx (45 \pm 2)^\circ.$$

Значит, коэффициент трения должен удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \cdot \exp(-1,57\mu) \approx 0,456.$$

Решив это уравнение с помощью Excel, получим

$$\mu \approx 0,50 \pm 0,02.$$

Заключительный этап

ВАРИАНТ 1

Задание 1

Вопрос. Разность сил натяжения верхней и нижней нитей равна $T_{\text{в}} - T_{\text{н}} = m(g + a) = 1,5 \text{ Н}$.

Задача. Если в процессе движения верхние две шайбы не будут отрываться друг от друга, а нижняя – от упора, то пара верхних шайб будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} \text{ и амплитудой } x_m = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}}.$$

Нижняя шайба не отрывается от упора, если сила упругости растянутой пружины не превышает силу тяжести шайбы. Отсюда следует

$$h \leq 15 \frac{mg}{k}.$$

Заметим, что если силы сцепления шайб невелики, то только сила тяжести может сообщить верхней шайбе ускорение, направленное вниз. В этом случае получается

$$h \leq 3 \frac{mg}{k}.$$

Задание 2

Вопрос. Разность молярных теплоемкостей равна $C_p - C_v = R$.

Задача. Цикл состоит из изобары 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. Тепло от нагревателя поступает на изобаре, а отдается холодильнику на изохоре. Тогда для КПД цикла получаем

$$\eta = 1 - \frac{3(n-1)}{5(n-n^{2/5})} \approx 0,24 = 24\%.$$

Задание 3

Вопрос. В обычном смысле закон Ома для нити лампы накаливания не применим, поскольку ее сопротивление существенно зависит от температуры.

Задача. Сопротивление нити лампочки в «рабочем» режиме равно

$$R = \frac{\xi^2}{2P} - r + \sqrt{\left(\frac{\xi^2}{4P} - r \right) \frac{\xi^2}{P}}.$$

Тогда из выражения $R = R_0(1 + \alpha t)$ находим искомую температуру:

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) \approx 2400 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Задание 4

Вопрос. Толщина линзы должна быть малой по сравнению с ее размерами, а пучки лучей должны быть параллельными.

Задача. При тесном прижатии двух тонких линз их оптические силы складываются, поэтому точка пересечения преломленных лучей приблизится к ширме. С учетом формулы линзы получаем

$$D_2 = \frac{1}{nL} = +1,25 \text{ дптр}.$$

ВАРИАНТ 2

Задание 1

Вопрос. Из условия следует, что лески подчиняются закону Гука, причем жесткость второй лес-

ки в 2 раза больше жесткости первой. Тогда

$$x_2 = \frac{x_1}{8} = \frac{4 \text{ мм}}{8} = 0,5 \text{ мм}.$$

Задача. На груз действуют 5 сил – тяжести, трения, реакции платформы и натяжения двух нитей. Так как нити различаются только длиной, то их жесткости связаны соотношением

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

При малом сдвиге груза от стены на dx удлинения нитей будут равны

$$dl_1 = d(\sqrt{h_1^2 + x^2}) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} dx = \cos \alpha \cdot dx$$

и $dl_2 = \cos \beta \cdot dx.$

Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{k_2 dl_2}{k_1 dl_1} = \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 = 2.$$

Окончательно из условия равновесия груза находим

$$T_1 = \frac{2mg}{2 + \sqrt{3} + 6\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{4mg}{2 + \sqrt{3} + 6\sqrt{2}}.$$

Задание 2

Вопрос. Среднее расстояние между молекулами газа должно быть значительно больше их размеров, а средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул должна быть много меньше средней кинетической энергии молекул.

Задача. Из уравнения состояния газа и условия равновесия поршня находим силу давления поршня на уступы:

$$F = \left(\frac{n}{k} - 1 \right) (p_0 S + mg) \approx 12 \text{ Н}.$$

Задание 3

Вопрос. Мощность, потребляемая любым элементом цепи, равна мощности работы электрических сил по перемещению заряда через этот элемент. Если для этого элемента $I = f(U)$, то $P = U \cdot I = U \cdot f(U)$.

Задача. При разомкнутом ключе лампа потребляет мощность

$$P_1 = U_1 I_1 = (\varepsilon - r I_1) I_1 = \frac{2\varepsilon^2}{9r}.$$

После замыкания ключа будет потребляться мощность

$$P_2 = U_2 I_2 = \left(\frac{(\sqrt{13} - 1)^2 \varepsilon}{12} \right) \left(\frac{(\sqrt{13} - 1) \varepsilon}{3r} \right) = \frac{(\sqrt{13} - 1)^3}{8} P_1 \approx 13,3 \text{ Вт}.$$

Задание 4

Вопрос. Для построения преломленного луча надо провести луч, параллельный данному и проходящий через оптический центр линзы без преломления. Эти лучи должны попасть в одну точку фокальной плоскости. Из геометрии получаем

$$\beta \approx \alpha \pm \frac{x}{F} = (0,15 \pm 0,05) \text{ рад}$$

(луч может падать на линзу как сверху, так и снизу).

Задача. В соответствии с условием, изображение источника мнимое. Из построения изображения и формулы линзы находим фокусное расстояние:

$$F = \frac{LR}{r' - r} = 36 \text{ см}.$$

КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

Телефон: (495) 363-48-86,

http://capitalpress.ru

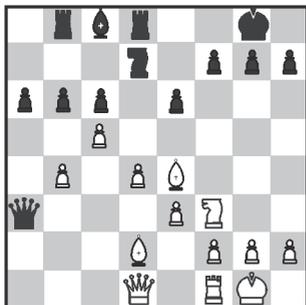
ВестИ С ШАХМАТНЫХ ПОЛЕЙ

В июне в норвежском городе Ставангер проходил престижный шахматный турнир. Он стал одним из самых представительных в истории шахмат. По круговой системе соревновались 10 ведущих шахматистов современности, средний рейтинг которых лишь немного не дотянул до отметки в 2800, составив 2797 баллов. Победу в турнире одержал армянский гроссмейстер Левон Аронян, набрав 6 очков из 9 возможных. Второе и третье место разделили Владимир Крамник и Хикару Накамура, представляющий США. Неудачно выступили недавние участники матча на первенство мира: Магнус Карлсен, набрав 4 очка, разделил 7–9 место, а Сергей Карякин с 3,5 очками замкнул турнирную таблицу, не одержав ни одной победы.

В ходе турнира был сыгран ряд интересных партий. Представляем вашему вниманию две партии с участием действующего чемпиона мира.

Л.Аронян – М.Карлсен

1. d4 d5 2. c4 c6 3. ♘f3 ♙f6 4. ♗c3 e6 5. e3 a6 6. b3 ♗b4 7. ♗b2 ♗bd7 8. ♗d3 0-0 9. 0-0 ♖e7 10. ♙c2 ♚d8 11. a3 ♗:a3 12. ♖:a3 ♗:a3 13. c5. Смысл жертвы качества заключается в том, что теперь черные испытывают трудности с возвращением ферзя в свой лагерь. 13...b6 14. b4 ♗:e4 15. ♗:e4 de 16. ♗:e4 ♚b8.

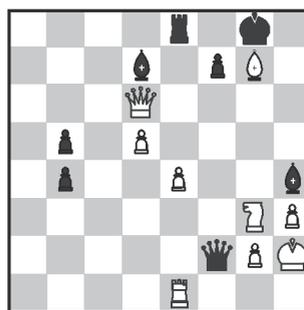


Более активное положение фигур определяет преимущество белых. Л.Аронян проводит типичную комбинацию, рассмотренную в одном из предыдущих выпусков шахматной странички. 17. ♗:h7+ ♗:h7 18. ♗g5+ ♗g8 (18... ♗g6 19. ♙g4 f5 20. ♙g3 ♗f6 21. ♙h4 с сильной атакой) 19. ♙h5 ♗f6 20. ♙:f7+ ♗h8 21. ♙c7 ♗d7 22. ♗f7+ ♗h7 23. ♗:d8+ ♚c8 24. ♙:b6! ♗d5 25. ♙a7 ♚:d8 26. e4 ♗d3?! (26... ♗f6) 27. ed ♗:d2 28. ♙c7 ♗g5 29. dc (d6!) ♗c8 30. h3 ♗d5! 31. ♖d1 e5? (31... ♚f8!) 32. ♖d3! ed 33. ♙e7! ♗f5 34. ♖g3 ♗g6 35. ♙h4+. Выигрыш белых.

В.Крамник – М.Карлсен

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗c4 ♗c5. В последнее время итальянская партия все чаще встречается на самом высоком уровне, поскольку в испанской партии подавляющее число игр заканчиваются вничью в берлинском эндшпиле. 4. c3 ♗f6 5. d3 d6 6. 0-0 a6 7. ♖e1 ♗a7 8. a4 0-0 9. h3 ♗e7 10. d4 ♗g6 11. ♗bd2 c6 12. ♗d3 ♚e8 13. ♗c2 h6 14. ♗f1 ed 15. cd c5 16. d5 b5 17. ab ab 18. ♗g3 ♗d7 19. ♗e3 ♗b6 20. ♖:a8 ♗:a8 21. b4 ♗a7?! (лучше было 21... ♗b7, поскольку теперь белые могут сделать свой следующий ход с темпом) 22. ♙a1! ♗c7. Переход в эндшпиль невыгоден черным. 23. ♗:h6 cb 24. ♗:g7!? ♗:c2 25. ♙:f6 ♗:f2?! Черные идут на ошибочный вариант, не предвидев 29 и 30 ходы белых. 26. ♖h2 ♗d8 27. ♙:d6 ♗h4 28. ♗:h4: ♗:h4.

29. ♗h5! (Ладью брать нельзя! После 29... ♗:e1 следует 30. ♙h6 с решающей атакой.) 29... ♗h3 30. ♖g1! Хладнокровный ход, отбивающий все угрозы черных. Позиция белых выиграна. 30... ♗g5 31. ♗f6 ♗g4 32. ♗:g5 ♗:h5 33. ♙h6 ♚:e4 34. ♙:h5 ♗f5 35. ♙h6 b3 36. ♗f6 ♗f4 37. ♙:f4 ♚:f4 38.



d6 ♚:f6 39. ♖d1 ♚h6 40. ♖g1. Белую пешку не остановить, и они выигрывают.

В наше время поражение действующего чемпиона – не редкость, а еще каких-то сто лет назад это было настоящим событием в шахматном мире. Так, например, первый чемпион мира В.Стейниц в период с 1873 по 1882 год не только не проигрывал, но вообще выиграл абсолютно все свои турнирные партии. Правда, за 9 лет их было сыграно всего 25. Беспроигрышная серия Х.-Р.Капабланки продлилась 8 лет: с 1916 по 1924 год. Но по мере нарастания количества соревнований и числа игр в них такие длительные по времени беспроигрышные серии стали невозможны, и теперь правильнее считать их в партиях. В период с 1972 по 1973 год. М.Таль провел без поражений 86 партий. Его рекорд побил В.Крамник, на рубеже веков не знавший поражений на протяжении 89 партий. На фоне стремительно развивающейся компьютерной подготовки и высокой интенсивности проводимых соревнований создается впечатление, что этот рекорд будет держаться еще долго.

А.Русанов

Видели ли вы когда-нибудь узоры,
«нарисованные» мхом?..



УЗОРЫ ПОД СКАМЕЙКОЙ



Узоры под скамейкой

(Продолжение – на с. 41 внутри журнала)